國立臺灣海洋學院
漁業研究所
第87－01號專刊

漁 業 生 物 統 計 方 法

羅 黔 輝

STATISTICAL METHODS IN FISHERY BIOLOGY

Nancy C. H. Lo

國立臺灣海洋學院漁業研究所
中 央 研 究 院 統 計 研 究 所
美 國 西 南 漁 業 中 心

中 華 民 國 七 十 六 年 六 月 出 刊

編者序

為迎合中央研究院統計所推廣統計之應用，編者在國科會之支助下，於民國 75 年2月起在國立臺灣海洋學院漁業研究所授課一學期。課程內容包括基本統計概念和應用統計方法推算海魚（ Pelagic fish ）早期生活史之成長率和死亡率，並介紹美國西南漁業中心海洋調查和實驗室收集資料之程序。教學材料取自編者在美國西南漁業中心過去五年之數項研究結果整理而成，如有任何錯誤，編者將負全責，並敬請將錯誤函告編者。

漁業學系助教黃娟娟校對、鄭肇雄協助中文修改，呂虹枝同學抄寫全文，編者深表謝意。

羅黔輝

民國 75 年 5 月

臺灣　基隆

PREFACE

This course was taught to the first year graduate students of the School of Fisheries at National Taiwan College of Marine Science and Technology during the author's three month stay as a visiting professor, Feb 21 - May 24, 1986. Bulk of the material came from author's research publications in the past five years. The notes include basic statistical techniques applied to fishery problems, and biological parameter estimation procedures for the early life stages of pelagic fish, northern anchovy (*Engraulis mordax*) in particular.

The text was written in Chinese so that it may be used as a future reference for Chinese fishery biology students and researchers. The notes were first hand-copied by Ms. Horng-Jy Leu and edited by both Ms. Jenny J.J. Hung and Mr. Chao-Hsiung Cheng. The author deeply appreciates their effort and time. For any error found in the text, the author takes full responsibility. The author sincerely thanks the U.S. National Marine Fisheries Service for granting her three month leave, the Institute of Statistics, Academia Sinica, for the sponsorship, and National Science Council of Taiwan, Republic of China, for the funding.

N. Chyan-huei Lo

Keelung, Taiwan, R.O.C.

May, 1986

目　　錄

一、序　論（ Introduction ）

1.1　統計的目的（ Objective of Statistics ）

統計的目的是從樣本（ Sample ）中取得的資料對母體（ Population ）作一些推論或結論（例如估計、預測或作決策）。

定義：

母體（ Population ）是包括所有具有某種特性的觀察量（ Observation ），這些觀察量可能是可數的（定量的）度量（ Quantitative Measurements ），例如長度、重量、捕獲量，或者是定性的（ Qualitative ），例如性別，標籤與否等。樣本（ Sample ）是實際上的一些觀察量。

如何抽樣和如何分析資料以便從樣本中得到最多的資料（ Information ），這種程序被稱作實驗（ Experiment ），因此統計問題牽涉到：

1. 實驗設計或抽樣程序。
2. 資料收集和分析。
3. 自樣本中獲得的資料對母體作結論。

例 1.1　1965−68，加州漁獵部（ California Department of Fish and Game ）作了幾次海蝦（ Ocean shrimp ; Pandulas jordoni ）的調查。在每次調查中，隨意抽選 150 站，在每一站上拖網 30 分鐘的捕獲量是觀察量， 所有可能的捕獲量是母體。樣本平均捕獲量是用來估計（推測）母體的平均捕獲量，海蝦總群量是依據抽樣的資料決定的。

例 1.2　Yuba 河的母鮭魚（ Spawning salmon ）的魚體長是一個母體。如果抽樣一百條母鮭魚並量體長，這一百個體長量度形成一個樣本，可用作估計母體的魚體長。

例 1.3　一位漁民欲知道月齡對捕魚的影響，在一年中，他每月捕魚兩次，一次是在月圓，一次是在新月，每月被歸類於月圓時其捕魚之好與壞，他的資料如下：

	月　圓	新　月	總次數
捕魚好	七	五	十二

這些資料包括 12 個觀察值。這個試驗的目的是要決定他是應該在那一階段去捕魚或者根本是不須考慮月圓與新月，您認為如何？

1.2　隨機變數（ Random Variables ）和機率分配（ Probability Distribution ）

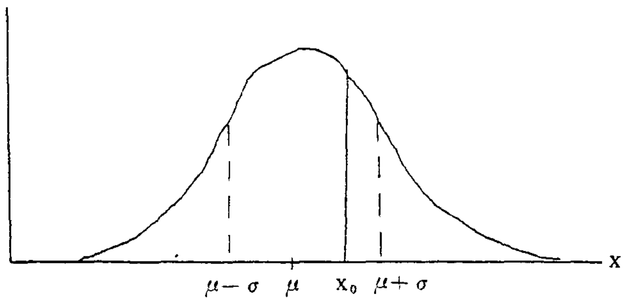


圖 1.1　Normal distribution density function

常態分配 R.V. 之最重要的特徵是 68 %的數量在 $\mu-\sigma$ 和 $\mu+\sigma$ 之間，95%的數量在 $\mu-2\sigma$ 和 $\mu+2\sigma$ 之間，99.7 %的數量在 $\mu-3\sigma$ 和 $\mu+3\sigma$ 之間。這些特徵條件在統計推論問題中常常用到。

中央極限定理（ Central limit theorem ; C.L.T. ）：如果獨立隨機樣本取自一個具有平均值 μ 和標準差 σ 的母體，每一樣本包括 n 觀察量，當 n 很大時，樣本平均值 $(\bar{X})$ 將會是常態分配 $(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$。

此一定理（ C.L.T. ）促使常態分配成爲統計中最重要的機率分配。如果 μ 和 σ 是已知數，n 很大，我們能應用 C.L.T. 來計算樣本平均值小於某一數量的機率。

例 1.6　在一個比較網目大小對海蝦總體的影響中，我們須知道蝦頭胸甲長（ Carapace length ）的分配，假如任何一年齡的頭胸甲長是常態分配。請計算下列各種區間的預期比率： 14.5 − 15.0 mm ， 15.0 − 15.5 mm ，……， 18.5 − 19.0 mm，頭胸甲長平均值是 17.1 mm，標準差是 0.81 mm 。

Let X = carapace length of ocean shrimp .

$$P(14.5 < X < 15.5) = P\left(\frac{14.5-17.1}{.81} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{15.0-17.1}{.81}\right)$$

$$= P(-3.21 < Z < -2.59)$$

$$= P(2.59 < Z < 3.21)$$

$$= P(0 < Z < 3.21) - P(0 < Z < 2.59)$$

$$= .4999 - .4952 = .0047$$

Then the same is done for the next class interval.

$$P(15.00 < X < 15.50) = P\left(\frac{15.00-17.1}{.81} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{15.50-17.1}{.81}\right)$$

$$= P(-2.59 < Z < -1.98)$$
$$= P(1.98 < Z < 2.59)$$
$$= .4952 - .4761 = .0191$$

The probabilities of the remaining class intervals are left as homework.

Finally we have

Carapace length interval	Probability or expected proportion
14.50 − 15.00	0
15.00 − 15.50	.02
15.50 − 16.00	.07
16.00 − 16.50	.14
16.50 − 17.00	.22
17.00 − 17.50	.24
17.50 − 18.00	.18
18.00 − 18.50	.09
18.50 − 19.00	.03
19.00 and above	.01

B 、二項分配（ Binomial distribution ）

當在標本中的每一個單位可以被列爲具有或沒有一種特徵，例如一條魚是雄的或是雌的；是有標籤的或沒有標籤的；一個人抽煙或不抽煙；一件物品是好的還是壞的，這兩個特徵可以被通稱爲成功或失敗。一個包括有與否特徵的單位就是二項母體（ Binomial population ），如果我們用 1 表示成功，用 0 表示失敗。二項母體就包括 0 和 1 。用 X 代表二項母體的隨機變數， p 是 $X=1$ 的機率， q 是 $X=0$ 的機率， $p+q=1$ ，如果 $X_1\cdots\cdots X_n$ 是來自一個二項母體的獨立觀察量，則樣本總量 $Y=\Sigma X$，成功總數，就是跟隨二項分配，其參數爲 n 和 p ，或者寫成 $Y \sim B(n, p)$。

二項機率密度函數，是

$$P(X=y) = f(Y=y \mid n, p) = C_y^n p^y q^{n-y}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n!}{y!(n-y)!} p^y q^{n-y} & y = 0, 1, \cdots\cdots n \\ 0 & \text{否則} \end{cases}$$

Y的平均值（μ）和變方（σ^2）是

$\mu = np$; $\sigma^2 = npq = np(1-p)$; $\sigma^2 < \mu$

下列例題說明如何自一個二項分配中計算機率：

例 1.7 每年打獵季節的第一天只有30%的擁有打獵執照者會被抽出准許打獵，請計算在 5 人中有 4 人被抽的機率。

Solution: $n=5$, $p=.3$

Y = number of people getting drawn

$P(Y=4 \mid n=5, p=.3)$

$= C_4^5(.3)^4(.7)^1 = .028$

例 1.8 一家餐館有下列程序來檢查牡蠣，當 10 個牡蠣被隨意選出時，如果二個或二個以上是壞的，此批貨將被拒絕。接受此貨的機率是多少？

1. 如果 5 %的牡蠣是壞的　　2. 如果 10 %的牡蠣是壞的

Solution: Y = number of defectives

$n = 10$

(a) $p = .05$

P (accepting the stock)

$= P$ (observing 1 or fewer bad oysters)

$= P(Y=0 \text{ or } Y=1 \mid n=10, p=.05)$

$= P(Y=0) + P(Y=1)$

$= C_0^{10}(.05)^0(.95)^{10} + C_1^{10}(.05)^1(.95)^9$

$= .5987 + .3151 = .9138$

(b) $p = .1$

P (accepting the stock)

$= P(Y=0 \text{ or } Y=1 \mid n=10, p=.1)$

$= P(Y=0) + P(Y=1)$

$= C_0^{10}(.1)^0(.9)^{10} + C_1^{10}(.1)^1(.9)^9$

$= .348 + .387 = .736$

P (rejecting the stock) $= 1 - P$ (accepting the stock)

$= 1 - .736 = .264$

如果 np 和 $n(1-p)$ 大於 5 ，可用常態機率來估計二項分配之機率。

例 1.9　三分之一的魚是雌性的，隨機採樣 30 條魚，計算 10 條魚是雌的機率？

Solution:　$Y =$ number of females

$n = 30$

$p = 1/3$

Using binomial formula, we have

$$P(Y = 10 \mid n = 30,\ p = 1/3)$$
$$= C^{30}_{10}(1/3)^{10}(2/3)^{20}$$
$$= \frac{30!}{10!\,20!}\frac{2^{20}}{3^{30}} = .15$$

Using normal approximation based on C.L.T. we have

$$P(Y = 10 \mid n = 30,\ p = 1/3)$$
$$= P(9.5 < Y < 10.5 \mid \mu = 30(1/3) = 10,\ \sigma^2 = 30(1/3)(2/3) = 6.66)$$
$$= P\left(\frac{9.5 - 10}{\sqrt{6.66}} < \frac{Y - \mu}{\sigma} < \frac{10.5 - 10}{\sqrt{6.66}}\right)$$
$$= P(-.19 < Z < .19)$$
$$= 2P(0 < Z < .19)$$
$$= 2(.075) = .15$$

C、卜瓦松（Poisson）分配（稀少事件之分配）

卜瓦松分配是空間（Space）或時間（Time）的一族系（Family）分配，例如在盤中一方格裏的細菌數量，在一單位體積的水中魚卵的數量。更精確些，如果每一單位體積的水中卵數平均值是 λ，則在一單位體積的水中發現 Y 個卵的機率是根據下列公式

$$f(y) = P(Y = y \mid \lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} & y = 0, 1, 2, \cdots\cdots \\ 0 & \text{否則} \end{cases}$$

Y 的平均值和變方都等於 λ　　即　$\mu = \sigma^2 = \lambda$

例 1.10　如果在一盤中每單位面積的細菌平均值是 2（$\lambda = 2$），發現有 k 個細菌的機率是什麼，$k = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, 7$，如果 $\lambda = 5$ 呢？

Evaluate　$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

k	P(Y=k)
0	.135
1	.271

2	.371
3	.18
4	.09
5	.036
6	.012
7	.004

Do the same if $\lambda = 5$.

卜瓦松分配族系和二項分配族系有些相同之處，例如機率增加直到平均值，然後下降，然而卜瓦松分配一般而言有長的右尾，參數、λ ，描述（決定）卜瓦松分配的有如二項分配的參數 p 一樣。 如果二項分配之抽樣 n 很大，p 很小，$\lambda = np$ ，卜瓦松分配可以用來約計二項分配，應用卜瓦松分配作爲數學模式來解釋數數分配（ Distribution of counts ）須滿足下列條件：（ P.22 , Elliot 1971 ）

1. 在抽樣地區中， 任何一個個體出現在任何一地點的機率是一常數（ Constant ）並且此機率很小（ $p \to 0$ ），因此在任何一地點，個體數目爲零的機率是很高（ $q \to 1$ ）。
2. 樣本單位（ Sampling unit ）的平均個數是極小於樣本單位的最高容量。
3. 在某一地區一個個體的存在不影響發現另一個體的機率，即每一個個體是獨立分別的單位。
4. 樣本（ Samples ）比母體要小$\frac{n}{N} \to 0$ 。

第一個條件說任何一個個體，佔據任何一個地點的機會是一樣的，要滿足此一條件，每一個體必須完全地隨機分佈在抽樣地區中。如果某種魚類在抽樣地區中很繁多而擁擠，每一抽樣單位的魚數達到飽和點，則不符合第二個條件，此時二項分配將是比較合適的模式（ $s^2 < \bar{X}$ ）。如果不符合第三個條件，即表示個體不是隨機分配，則卜瓦松分配是不適合的。遷移一個樣本單位會影響到另一樣本單位的機率。但是如果只是母體的一小部份被移出，則其影響很少，因此第四個條件保證自一個試驗到另一個試驗 P 的價值不變。

一個隨機分配（ Random distribution ）常常是須測驗的第一個假設（如果我們不能拒絕隨機分配則用Poisson 分配其好處是它很簡單，只有一個參數）。運用卜瓦松必須滿足以上四個條件。沒有試驗能證明隨機合乎卜瓦松分配，但只能說隨機假設沒有被推翻。有時雖然隨機假設被接受，但可能有不隨機的成分的存在只是沒有被發現。

重要的環境因素很少是隨機分配的，所以我們只能說不隨機成份未能被抽樣技術發

現而探測出來。

另一關於隨機分配的重要因素是抽樣單位的大小。如果抽樣單位大過於魚團（Clumps），則母體似乎會是隨機分配，因爲魚團多半是隨機分配的，如果樣本單位小於 $0.05\,m^2$，則不隨機多半可能被探測出來，隨機分配隨魚年齡而異。

如果我們不能拒絕隨機分配的假設，我們建議用卜瓦松分配，因爲這是一個簡單模式，尤其是有關計算信賴界限（Confidence limits）。

欲測驗次數分配是否合乎卜瓦松分配，可作下列的統計測驗：

$$I=\frac{\text{樣本變方}}{\text{理論變方（variance）}}=\frac{s^2}{\bar{x}}=\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{\bar{x}(n-1)}$$

$$\chi^2=I(n-1)=\frac{\Sigma(x-\bar{X})^2}{n-1}\sim\chi^2 \qquad \text{with } (n-1) \text{ degree of freedom}$$

如果 $n>31$，$\sqrt{2\chi^2}\sim N(2\nu-1,1)$

在此 $\nu=n-1$

如果 $\chi^2<\chi^2_{\nu,0.025}$ （$s^2<\bar{X}$） 可試二項分配

$\chi^2>\chi^2_{\nu,0.975}$ （$s^2>\bar{X}$） 可試負二項分配

D、負二項分配（Negative binomial distribution）

如果應用於卜瓦松分配的第一和第三條件不符合，母體的變方（Variance）通常比平均值要大（$\sigma^2>\mu$），母體是由聚集成小團所構成，好幾種數學模式是用來描述這些情況，但是負二項分配是最普遍的一種。

負二項分配是與二項分配相對的（Counterpart），$(-p+q)^{-k}$；$\mu=pk$，$p=\frac{\mu}{k}$ 並 $q=1+p$；$q-p=1$，其主要參數是平均值 μ 和指數 k，變方 $\sigma^2=kpq=\mu q=\mu(1+\frac{\mu}{k})$ $\therefore \sigma^2>\mu$。當 $k\to\infty$，則 $\sigma^2=\mu$，負二項分配就趨近卜瓦松分配。

$\frac{1}{k}$ 是測量多餘的變方或群聚（Clustering）。負二項分配的密度函數是

$$f(x)=\frac{(k+x-1)!}{x!(k-1)!}\left(\frac{k}{k+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{k+\mu}\right)^x \qquad x=0,1,2,3,\cdots\cdots$$

$$\frac{p}{q}=\frac{\frac{\mu}{k}}{1+\frac{\mu}{k}}=\frac{\frac{\mu}{k}}{\frac{k+\mu}{k}}=\text{成功機率}=\frac{\mu}{k+\mu}$$

Problems:

1. Give some examples familiar to you of a sample and a population.
2. In EX 1.6 use the table of normal probability distribution. Calculate the probability of the remaining class intervals.
3. Tossing a balanced die, the random variable is the number showing in each toss. Write down the probability density function of this random variable.

   Let A be the event of observing an even number

   B be the event of observing the odd number.

   Using the rules on page 6, calculate P(A) P(B) P(A+B) and P(AB).
4. It is beleived that 20% of the fishing violations in San Luis Reservoir get caught during each fishing season. During January through April 1973, 150 violations were simulated, 38 of them were detected. What is the probability of getting such a sample, using both binomial formula and normal approximation? Does this sample support the claim?
5. Restaurant B in Berkeley has the following sampling procedure to check the oysters shipped from the east coast: If 50 oysters randomly selected from the stock are all good, then the stock is accepted; if 2 or more out of thses 50 oysters are bad, then the stock is rejected; if 1 out of these 50 oysters is bad, then 100 more oysters are randomly selected from the stock. If none of the 100 oysters are bad then the stock is accepted, otherwise, the stock will be rejected. Calculate the probability of accepting the stock when there are
   a. 1% bad oysters in the original stock,
   b. .5% bad oysters in the original stock.

Hint, use the rules $P(A+B) = P(A) + P(B)$ and $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

6. In a capture-recapture experiment, a small portion (p) of the fish population is tagged. When a large amount of fish (n) is sampled, the number of tagged fish caught (Y) approximately follows Poisson distribution with parameter $\lambda = np$. If tagging ratio is .01 and 200 fish are sampled, calculate the probability of getting tag returns equal to 0, 1, 2, 3, 4 and 5.

   Note: Usually P is never known, therefore the sample tagging ratio is used to estimate population tagging ratio, furthermore, to estimate the fish population.

二、統計推論（ Statistical Inference ）

2.1 參數推算

一個母體可以用幾個參數來描述，因爲通常不可能觀察整個母體，參數的値量是未知數。如何從樣本中取得資料以便計算最佳參數推算是統計目的之一。

對於參數推算有兩種方法，一個是點推算（ Point estimator ），一個是區間推算（ Interval estimator ），例如：測量 100 條魚後，我們說魚體長平均值是 625 mm ，這是魚體長平均值的點推算。如果我們說平均魚體長是在 600 mm 和 650 mm 之間，則（ 600 mm ， 650 mm ）是平均魚體長的區間推算。

定義：

一個推算公式（ Estimator ）是告訴我們如何計算推算值，它是根據樣本之資料，例如樣本平均值 $\overline{Y}=\frac{\Sigma Y}{n}$ 是母體平均值之一個推算公式（ Estimator ），它說明一旦樣本到手，如何計算推算值。

A 、點推算

如果 θ 是一個參數，其點推算是寫成 $\hat{\theta}$ ，“最佳”點推算是不偏差的， $E\hat{\theta}=\theta$，它的預期值或平均值是等於 θ ，同時它的變方最小。

a 、母體平均值的點推算：

母體平均值有好幾種點推算，例如樣本平均值，樣本中位數，樣本衆數，樣本最大數和最小數的平均。在這幾種推算值中，樣本平均值是不偏差的。同時（當樣本很大時）C.L.T. 使我們能夠陳述有關樣本平均值的機率。

b 、母體變方的點推算：

最常用的母體變方的點推算是 $s^2=\frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{n-1}$ 。

如果隨機變數 X 是來自常態分配，則 s^2 是母體變方的不偏差的推算公式。

B 、區間推算

一個參數的區間估計通常是指它的信賴區間（ Confidence interval ），在這一段裏，我們將只討論母體平均值的區間推算。

a 、如果樣本大小（ Sample size ）大過30，根據C.L.T. ，樣本平均值 $\overline{Y}$ 應是常態分配的，其平均值是 μ，變方是 $\frac{\sigma^2}{n}$ ，因此 95 ％的樣本平均值應介於 $\mu-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 和 $\mu+2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 之間，所以

$$P\left(\mu-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\overline{Y}<\mu+2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95 \qquad (圖 2.1)$$

經過移項，則得

$$p\left(\overline{Y}-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{Y}+2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

這是說如果我們一直抽樣 ，並且樣本大小很大，由每一個樣本，計算一個 $\overline{Y}$，則每一個平均值$\overline{Y}$都可用來計算一個區間推算， i.e. ，$\overline{Y}-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\overline{Y}+2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，大約 95 % 的區間推算會包括原來的母體平均值，任何一個單獨的（樣本平均值）區間推算或包括或不包括母體平均值，只是因爲如果我們不斷抽樣， 95 % 的區間推算會包括母體平均值，使我們對區間推算的信賴度是 95 %，一般說來， $1-\alpha$ 信賴區間（ c.i. ）是寫成

$$\overline{Y}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad , \quad \overline{Y}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$Z_{\alpha/2}$ 是常態分配表中的數值，有$\alpha/2$的標準常態變數大於 $Z_{\alpha/2}$ ，或者寫成 $P(Z>Z_{\alpha/2})=\frac{\alpha}{2}$，$\alpha$ 是顯著水準（圖 2.2 ）。

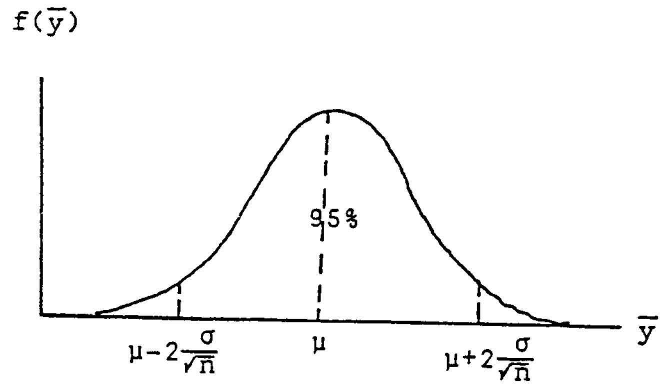


圖 2.1 The normal density function of sample mean ($\overline{y}$) with mean μ and variance σ^2/n. 95% of sample means are between $\mu\pm2\sigma/\sqrt{n}$.

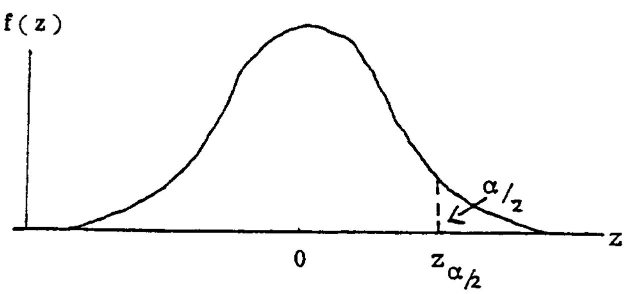


圖 2.2 The density function of the standardized normal random variable, Z. $P(Z>z_{\alpha/2})=\alpha/2$.

如果 $1-\alpha=0.9$ ， 0.9 是信賴係數（Confidence coefficient），$\alpha=0.1$，$Z_{\alpha/2}=Z_{0.05}$ $=1.645$ ，90 % 母體平均值的信賴區間是 $\bar{Y}-1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ， $\bar{Y}+1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

普通母體變方 σ^2 是未知數，所以用樣本變方 s^2 代替。

例 2.1 1968 年海蝦季節，有一個樣本的海蝦頭胸長度（Carapace length）如下：

Shrimp carapace length (X)	Frequency (f)
15.4	1
15.6	1
16.0	1
16.2	1
16.4	4
16.6	2
16.8	3
17.0	8
17.2	5
17.4	6
17.6	3
17.8	2
18.0	2
18.2	2
18.4	2
18.6	1
18.8	1
19.2	1
20.0	1
20.8	1
21.4	1
21.6	1

計算 95 % 母體平均值的信賴區間。

Solution： $\bar{X}=\frac{\Sigma f X}{\Sigma f}=\frac{876.8}{50}=17.53$ ……… point estimate

$\Sigma f X^2 = 15456.16$

$$s^2=\frac{\Sigma\,[f(X-\overline{X})]^2}{(\Sigma f)-1}=\frac{\Sigma f X^2-\frac{(\Sigma f X)^2}{n}}{n-1}=\frac{80.5952}{49}=1.6448$$

$$\left(17.53\pm 2\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=17.53\pm .3627$$

$$=(17.16\ ,\ 17.89)\cdots\cdots\cdots 95\ \%\ \text{c.i.}$$

b 、如果樣本大小很小（ $n<30$ ）並且樣本是來自土堆形分配的總體，則 $1-\alpha$ 信賴區間是 $\overline{Y}-t_{\alpha/2,\,d.f.}\frac{s}{\sqrt{n}}$ ， $\overline{Y}+t_{\alpha/2,\,d.f.}\frac{s}{\sqrt{n}}$

$t_{\alpha/2}$, d.f. 是來自 t 表， $P(t>t_{\alpha/2})=\alpha/2$, d.f. 是自由度（ Degrees of freedom ）等於 $n-1$ 。

例 2.2　在 1973 Razor 蚌的調查中，在一個高潮的週末， 11 位挖蚌人被訪問，他們的蚌殼數量是 18 , 22 , 19 , 20 , 20 , 13 , 22 , 20 , 21 , 20 , 19 ，請計算 95 % 的平均值區間估計

Solution：　X ： Number of clams caught

$$\overline{X}=\frac{\Sigma X}{n}=\frac{214}{11}=19.45$$

$$s^2=\frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{n-1}=\frac{\Sigma X^2-\frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n-1}=\frac{4224-4163.27}{10}=6.072$$

$$\frac{s}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{6.072}{11}}=.743$$

$$t_{.025,\,d.f.=10}=1.812$$

95 % c.i. for the average clam per digger is

$$\overline{X}\pm t_{.025,\,d.f.=10}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$=19.45\pm 1.812\,(.743)$$

$$=19.45\pm 1.346$$

$$=(18.104\ ,\ 20.79)$$

C 、自二項母體抽樣

應付二項母體，參數 p 是觀察“成功”的機率，通常是未知數須要推算的。樣本中的觀察量 $x_1\cdots\cdots x_n$ 是自母體中隨機抽選出來的， $Ex=p$ ， $\sigma_x^2=p(1-p)$ ，樣本比率 $\hat{p}=\frac{\Sigma x}{n}$ 是 p 的最佳推算公式。注意 $\hat{p}$ 就是樣本平均值 $\overline{x}$ （記得 x 是 1 或 0 ，成功或失敗），所以我們用 $\hat{\sigma}_x^2=\hat{p}(1-\hat{p})$ 為 σ_x^2 的點推算。

樣本大時， $\hat{p}$ 是近乎常態分配 $\mu=p$ ， $\sigma^2=p\frac{(1-p)}{n}$ ， $1-\alpha$　p 的信賴區間是

$$\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad , \quad \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1+\hat{p})}{n}}$$

例 2.3　1973 年在 San Luis 水庫（ Reservoir ）的違反釣魚法規之研究調查中，模擬 150 件違規事件，其中 38 件被發現，請推算母體中違規比率，並計算 95 %信頼區間。

Solution：　p = the proportion of violations detected each year

$n = 150$

$\Sigma X = 38$

$$p = \overline{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{38}{150} = .25$$

$$s_X^2 = \hat{p}(1-\hat{p}) = (.25)(.75) = .1875$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{p}}^2 = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} = \frac{.1875}{150} = .00125$$

95 % c.i. for p

$$\hat{p} \pm 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$= .25 \pm .069 = (.18, .32)$$

如果樣本大小不大，爲 p 建立一個 $1-\alpha$ 信賴區間不是直接了當的事，因爲二項隨機變數是離散性，我們不可能計算一個信賴區間，說是一定等於 95 %，我們首先對於一個已知 p 和 n，尋找 $\hat{p}_0$ 和 $\hat{p}_1$：

$$P(\hat{p} < \hat{p}_0 \mid p) < 0.025$$

$$P(\hat{p} > \hat{p}_1 \mid p) < 0.025$$

或者　$P(\hat{p}_0 \leqslant \hat{p} \leqslant \hat{p}_1 \mid p) \geqslant 0.95$　（圖 2.3，圖 2.4）

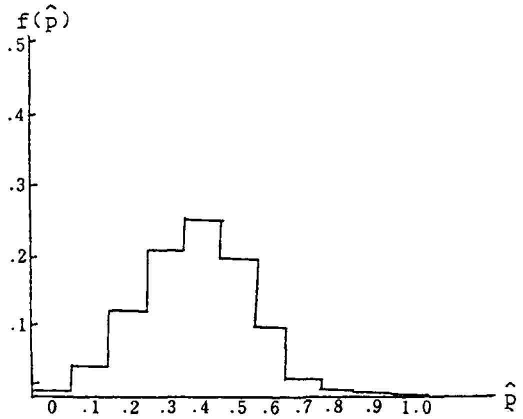


圖 2.3　The probability distribution of sample mean, $\hat{p}$, with mean $p = 0.4$ and sample size = 10.

從不同的 p 值中，計算 $\hat{p}_0$ 和 $\hat{p}_1$ 、 $\hat{p}_0$ 和 $\hat{p}_1$ 形成二個曲線（圖 2.4 ）。

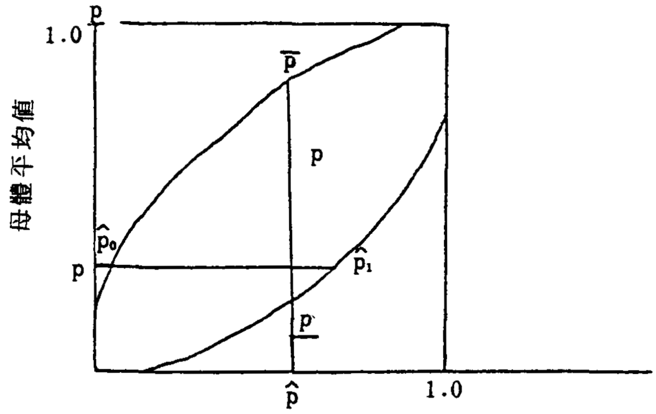


圖 2.4　The confidence interval for population mean, p：($\underline{p}$, $\bar{p}$) based upon sample mean ($\hat{p}$). For the definition of $\hat{p}_0$ and $\hat{p}_1$, see text.

現在我們抽樣，樣本大小（ Size ）是 n ，計算 $\hat{p}_0$ 與 $\hat{p}$ 成一縱線的縱坐標的兩點（ $\underline{p}$ ， $\bar{p}$ ）是大約 95 %的 p 之信賴區間。

運用上圖和二項機率表，我們可以建立 $1-\alpha$ 信賴區間如下：　y 是樣本成功數量

尋找　$\underline{p}$ ： $p(Y>y \mid \underline{p}) \leqslant \alpha/2$　(1)

$\bar{p}$ ： $p(Y<y \mid \bar{p}) \leqslant \alpha/2$　(2)

在二項機率表中，列有 n 和 Y ，找出 p 適合 $\underline{p}$ 和 $\bar{p}$ 的條件。

例 2.4　在一個樣本中有十條魚，三條是雌魚，計算母體比率的 95 %信賴區間。

Solution：　$n=10$

$Y=3$

Find $\underline{p}$ such that

$p(Y<3 \mid \underline{p})<.025 \qquad \rightarrow \underline{p}=.1$

$\bar{p}$ such that

$p(Y<3 \mid \bar{p})<.025 \qquad \rightarrow \bar{p}=.6$

at least 95 % c.i. for p is (.1 , .6)

If normal approximate is used, 95 % c.i. for p is:

$$p \pm t_{\alpha/2,\,d.f.=9} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$= .3 \pm 2.28 \sqrt{\frac{(.3)(.7)}{10}}$$

$$= .3 \pm .33 = (0 , .63)$$

2.2 假設檢定(Hypothesis testing)

除了參數的推算之外，假設檢定是統計推理的另一種方法，在這個主題下，先設一個虛無假設，或是針對參數，或是針對隨機變數的分配。在樣本統計量計算之前，先設立一個規則以決定我們接受此假設或否定此假設，所以統計檢定包括四要素：

1. 虛無假設(Null hypothesis ; Ho)
2. 對立假設(Alternative hypotheses ; Ha)
3. 檢定統計量(Test statistic)
4. 否定範圍和接受範圍(Reject or critical region and acceptance region)

虛無假設 H_0 說明要檢定的假設，所以 H_0 須要有母體參數的假設數值，否定或接受虛無假設的決定在於檢定統計量，此仍從樣本計算出來的，所有檢定統計量或落於否定範圍或落於接受範圍，如果檢定統計量落於否定範圍，虛無假設就被否定了，不然就接受虛無假設。

與假設檢定有關的兩型誤差(Error)：

1. 型一誤差(Type Ⅰ error)：如果虛無假設是對的，但被否定了，則犯“型一誤差”，其機率被稱爲顯著水準(Level of significance)，通常用 α 代表。

2. 型二誤差(Type Ⅱ error)：如果虛無假設是錯的，但被接受了，犯“型二誤差”的機率用 β 代表，只在對立假設下的參數數值下計算 β。

否定範圍是決定於顯著水準的數值，並使型二誤差機率達到最小程度。

A 、母體平均值的假設檢定

a 、大樣本統計檢定

大樣本統計檢定是根據常態分配的檢定統計量，任何檢定程序可以寫成如下：

①虛無假設　H_0 ： $\mu = \mu_0$

②對立假設　H_a ： $\mu \neq \mu_0$

③檢定統計量是樣本平均值 $\overline{X}$

④顯著水準 α ；危險域(Critical region)是

$$\overline{X} < \mu_0 - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{和} \quad \overline{X} > \mu_0 + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

接受範圍是

$$\mu_0 - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{X} \leqslant \mu_0 + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

這也就是說如果 $Z = (\overline{X} - \mu) / \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 大於 $Z_{\alpha/2}$ 或小於 $-Z_{\alpha/2}$ ，我們就否定 H_0，不然 H_0

就被接受。如果 σ^2 是未知數，s^2 就用來代替 σ^2 。

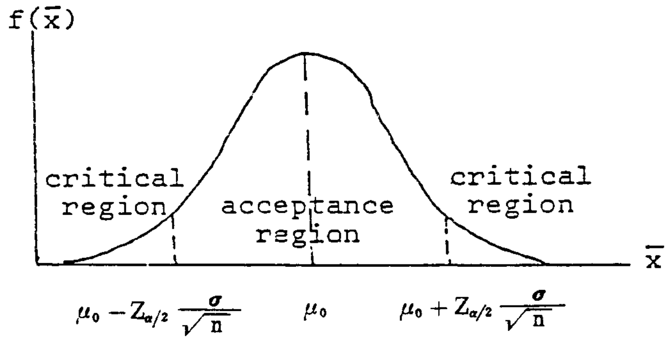


圖 2.5　The acceptance region and critical region of normal distributed sample mean $\bar{x}$.

例 2.5　1969 調查中，七歲大的鰹魚（ Bonito ）的魚體長的次數如下：

Length cm X	Frequency f
66	3
69	7
70	7
71	8
72	10
73	3
74	3
75	1
77	1
	43

請檢定體長平均值是 72 cm，運用顯著水準 5 %，並計算平均值的 95 % c.i.

Solution：　H_0　$\mu = 72$　　$\alpha = .05$

H_a　$\mu \neq 72$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma f X}{\Sigma f} = \frac{3052}{43} = 70.97$$

$$s^2 = \frac{\Sigma f X^2 - \frac{(\Sigma f X)^2}{n}}{n-1} = \frac{216832 - 216621.0233}{42}$$

$$= \frac{210.9767}{42} = 5.02$$

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}=\frac{70.97-72}{\sqrt{\frac{5.02}{43}}}=\frac{-1.03}{.3416}=-3.01$$

$$Z_{\alpha/2}=1.96$$

$$Z<-Z_{\alpha/2}$$

we reject H_0 $\mu=72$.

95 % c.i. for μ is

$$\overline{X}\pm 2\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$=70.92\pm 2\ (\ .3416\ )$$

$$=70.92\pm .6832$$

$$=(\ 70.23\ ,\ 71.6\ )$$

例 2.6　在一次海洋調查中，第 12 站的漁獲量包括 51 條 Dover sole ，其中 27 條是雄性， 24 條是雌性。檢定性比 1：1 的假設。

Solution：　Let p = population percentage of males.

q = population percentage of females.

H_0 ： $p=q=\frac{1}{2}$

H_a ： $p\neq q$

$n=51$

$\hat{p}=\frac{27}{51}$

under the H_0

$$\sigma^2_{\hat{p}}=\frac{p\,(\,1-p\,)}{n}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{51}=\frac{1}{(\,51\,)\,(\,4\,)}=.0049$$

$$Z=\frac{\hat{p}-\frac{1}{2}}{\sigma_{\hat{p}}}=\frac{\frac{27}{51}-\frac{1}{2}}{\sqrt{.0049}}=.42$$

$$Z_{\alpha/2}=1.96$$

since $Z<Z_{\alpha/2}$,　we do not reject the H_0 .

b 、小樣本統計檢定

假如樣本來自土堆形分配的母體，關於母體平均值的假設檢定，可以依照下列步驟:

如果母體變方（ σ^2 ）已知，Z 檢定法（ $Z=(\overline{X}-\mu)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ）可用於樣本大的統計檢定，如果 σ^2 是未知數，樣本變方（ s^2 ）可用來代替 σ^2 ，那麼 $t=(\overline{X}-\mu)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ，就不

是常態分配了，統計量 t 是 Student's t 分配，它的形狀隨 n 而變，當 n 很大時，t 就趨近常態分配，請注意 t 是$\overline{X}$，s 和 n 的函數，同時 $s^2 = \frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{n-1}$ 。t 分配隨樣本大小（n）而不同。

對於任何 n ，t 是 t 分配並有 n－1 d.f.。在表中之 t_α 值，符合於 $p(T > t_\alpha) = \alpha$，$\alpha = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005$。像常態分配一樣 t 分配是以零爲對稱的，這就是說 $p(T > t_\alpha) = p(T < -t_\alpha)$，t 檢定法與 Z 檢定法是一樣的，不同處是用 t 表來決定危險值（ Critical value ）而不用常態表。

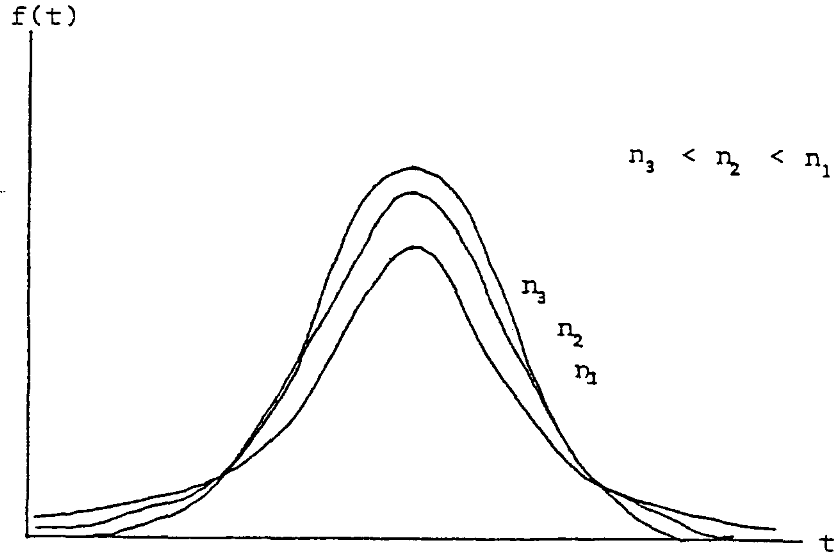


圖 2.6　The density functions of t statistics with different sample sizes, where $n_3 < n_2 < n_1$.

例 2.7　1973 Razor 蚌調查中，在低潮水的週末，樣本中有蚌數量爲 0，10.3，14.6，7.4，16.2，18.7，17.5 和 15.9，這些資料能證明平均值是 14 嗎？

Solution：　H_0 ：　$\mu = 14$

H_1 ：　$\mu \neq 14$

$n = 8$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{100.6}{8} = 12.57$$

$$s^2 = \frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{n-1} = \frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n-1} = \frac{1545.2 - 1265.045}{7} = \frac{280.155}{7}$$

$$= 40.02$$

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}=\frac{12.57-14}{\sqrt{\frac{40.02}{8}}}=-.64$$

$$t_{.025,d.f.=7}=2.365$$

$$|t|<2.365$$

we don't reject the H_0 : $\mu=14$.

c、α和β的關係

顯著水準α，其定義爲犯“型一誤差”的機率，而β是犯“型二誤差”的機率，α和β的關係能從圖2.7看出；當α增加時β就減少，當α是保持常數，唯一方法去減少β就是增加樣本大小。$1-\beta$是在對立假設中確定了的參數價值後否定虛無假設的機率。$1-\beta$被稱爲測驗的檢力（Power of the test），從一連串的μ數值中（在對立假設下），一連串的$1-\beta$可以計算出來。一個檢力曲線（Power curve）可以劃出來（圖2.8）。

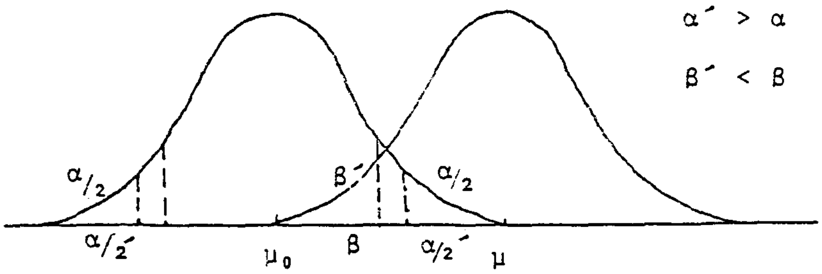


圖2.7 The relationship between type Ⅰ error, α, and type Ⅱ error, β.

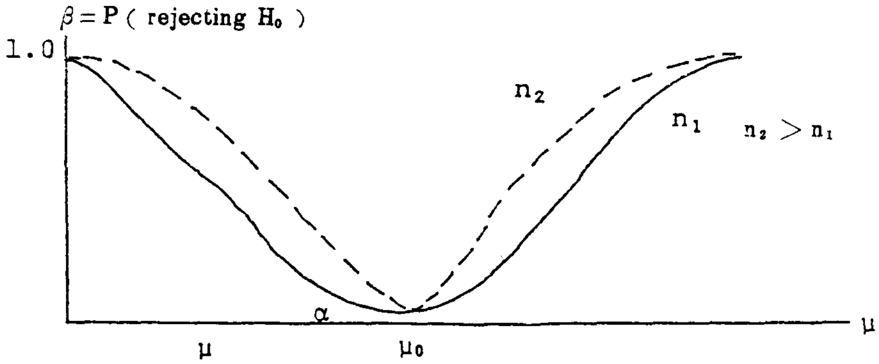


圖2.8 The power curves of test with two sample sizes : $n_2>n_1$.

$$P(\text{Rejecting } H_0) = P\{\overline{X} > \mu_0 + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ or } \overline{X} < \mu_0 - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu\}$$

$$= P\{\,|X-\mu_0| > 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu\}$$

例 2.8　用例 2.5 的資料必須有多少觀察量（ $n=?$ ）才能測出與母體平均值之差是 1 cm，其概率是 90 %。

Solution:　H_0 :　$\mu = 72$

H_a :　$\mu = 71$ or 73

the rejection region is

$$\overline{X} < 72 - 1.96\sqrt{\frac{5.02}{n}} \quad \text{and} \quad \overline{X} > 72 + 1.96\sqrt{\frac{5.02}{n}}$$

the acceptance region is

$$72 - 1.96\sqrt{\frac{5.02}{n}} < \overline{X} < 72 + 1.96\sqrt{\frac{5.02}{n}}$$

$$\beta = P(\text{accept the } H_0 \mid \mu = 71 \text{ or } 73) = 1 - .9 = .1$$

Because of the symmetry of the normai distribution. We only need to calculate sample size when one of the altematives is true.

$$\beta = P(72 - 1.96\sqrt{\frac{5.02}{n}} < \overline{X} < 72 + 1.96\sqrt{\frac{5.02}{n}} \mid \mu = 73) = .1$$

$$P\left(\frac{72 - 1.96\sqrt{\frac{5.02}{n}} - 73}{\sqrt{\frac{5.02}{n}}} < \frac{\overline{X} - 73}{\sqrt{\frac{5.02}{n}}} < \frac{72 + 1.96\sqrt{\frac{5.02}{n}} - 73}{\sqrt{\frac{5.02}{n}}}\right) = .1$$

$$\beta = P\left(\frac{72 - 73 - 1.96\sqrt{\frac{5.02}{n}}}{\sqrt{\frac{5.02}{n}}} < Z < \frac{72 - 73 + 1.96\sqrt{\frac{5.02}{n}}}{\sqrt{\frac{5.02}{n}}}\right)$$

$$= P(Z_0(n) < Z < Z_1(n))$$

$n = 10$　　$Z_0 = 3.37$　　$Z_1 = .5486$

$$\beta = P(-3.37 < Z < .5486) = .5 + .2 = .70$$

Therefore we know n has to be greater than 10 and Z_0 can be taken as $-\infty$.

We need to solve the equation

$$P(-\infty < Z < Z_1(n)) = .1$$

The normal table indicates that

$$Z(n) = -1.28$$

$$\rightarrow \quad \frac{72-73+1.96\sqrt{\frac{5.02}{n}}}{\sqrt{\frac{5.02}{n}}} = -1.28$$

$$\rightarrow \quad 3.24\sqrt{\frac{5.02}{n}} = 1$$

$$\rightarrow \quad n = 53$$

Problems:

1. Referring to EX 1.3, how would you conduct a hypothesis testing at 5% level of significance? Write down the null hypothesis, alternative hypothesis, test statistic and the critical region. From the sample result, what is your conclusion? How large should the sample size be in order to detect a difference of .1 90% of the time?

2. A sample of 14 crabs were taken from Eureka area for tissue analysis. Their Ag contents are as follows: 7.9, 7.2, 12.2, 9.9, 10.5, 28.3, 15.5, 12.8, 20.3, 19.0, 18.1, 8.0, 2.1, 1.5. Calculate 95% c.i. for the average Ag in crab tissue.

3. A fisheries biologist believes that the population of trout in a particular lake should be held at the 10,000 level for optimum fishing and continued stability of the fishery. He takes samples periodically having first marked 500. If a sample of size 200 fish is taken, what should be his decision rule choosing between

   a. This population is 10,000

   and b. The population is above or below 10,000.

   Stating that b is true when in fact a is constitutes the more important type of error, the probability of which he would like to hold at .10

   1. If in a sample of 200 fish, 6 of them are marked fish. What will your conclusion be?
   2. If there are actually 8,000 fish in the lake, how often will you conclude that there are 10,000 fish in the lake?

4. From investigations off Japan, Wilke has shown that 90% of adult female seals are pregnant during the winter season. Of seven seals taken off Alaska one winter only two were pregnant. Is there reason to believe that either this is

not a random sample of North American fur seals or that the proportion of pregnancies differs from Asiatic seals?

5. The following are the petrale sole data in a sample taken from the boat ALEX PALADINI at San Francisco Bay, February 1, 1974.

Male	Female	
362	426	396
346	438	368
344	442	420
352	414	436
350	408	476
370	382	430
352	414	
348	410	
362	442	
344	390	
374	414	
350	418	
362	380	
336	410	
334	474	
350	426	
342	378	
342	380	
336	440	
360	366	
368	434	
354	410	

a. Calculate the point estimates and 95% c.i. of the average length for the male and female.

b. Calculate the 95% c.i. for the percentage of females in the catch by this boat.

6. During February 1968, the crab cruise had in the sample 30 legal male crabs out of 195 males from depths greater than 30 fm. Since the trawl net was used, it is assumed that there were few escapements. Therefore it is reasonable to use the sample data to estimate the population proportion of legal crab. Calculate 95% c.i. for the percentage of legal crabs from that depth.

三、迴歸分析（ Regression Analysis ）

如果有一組成對的資料（X_1，Y_1），……，（X_n，Y_n），我們欲知道兩個隨機變數（X，Y）的關係，他們的關係可能是互相依賴或者單方依賴，或者是兩者皆是。例如體重和身高的關係是互相依賴，但用身高去預測體重，則是說體重依賴於身高，然而有些情形只有單方依賴是研究的對象，例如：要預測明年釣魚執照的發給乃是靠著今年執照發給的多少，還有如產卵總群和加入魚群（ Spawning stock 和 Recuritment ）的關係。我們只可說適合的溫度促使好的加入魚群，而不能反說。研究相互依賴關係的是相關理論，研究單方依賴的是迴歸分析。

線性模式

想要從已知的 X 值去預測 Y 的平均值 EY_x，我們必須先決定 X 和 Y 的關係，當 EY_x 是一個 X 的線性函數，即

$$EY_x = \alpha + \beta X \qquad (3.1.a)$$

或是

$$EY_x = \mu_y + \beta(X - \mu_x) \qquad (3.1.b)$$

α 是截距（ Intercept ）（請勿與顯著水準之 α 相混）

β 是斜率（迴歸係數）（請勿與型二誤差之 β 相混）

因此我們說 X 和 Y 有一個線性關係或者是 Y 是迴歸於 X，同樣地 X 也可以迴歸於 Y，那麼我們就有

$$EX_Y = \alpha_1 + \beta_1 Y \qquad (3.2.a)$$

或是

$$EX_Y = \mu_x + \beta_1(y - \mu_y) \qquad (3.2.b)$$

用（3.1）或（3.2）是看情形而決定，方法是一樣的，如果 Y 是迴歸於 X，Y 被稱爲因變數（ Dependent variable ），X 被稱爲自變數（ Independent variable ）。

因爲普通 X 和 Y 的樣本是抽自兩變數的（ Bivariate ）母體，係數 α 和 β 都是未知數，須要估計。如何估計是本章的主題，最常用的方法是叫最小平方法（ Least squares method — LS ）。LS 估計值 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 如果符合下列條件則是 α 和 β 的最小變異和不偏差的估計：

a、對任何一個 X，Y 是常態分配，平均值是 $\mu_{yx} = EY_x$ 和變異數（變方）σ_y^2。

b、變異數 σ_y^2 是常數，不隨 X 而變。

c、觀察值 Y_i 和 Y_j，$i \neq j$ 都是獨立的，不互相依賴。（3.1）可以寫成

$$Y_x = \alpha + \beta X + e$$

Y_x 是觀測值，e 是誤差項，上述三個條件是說 e 是常態分配，其平均值是零和變異數是 $\sigma_e^2 = \sigma_y^2$，e_i 和 e_j 是獨立的（圖 3.1）。

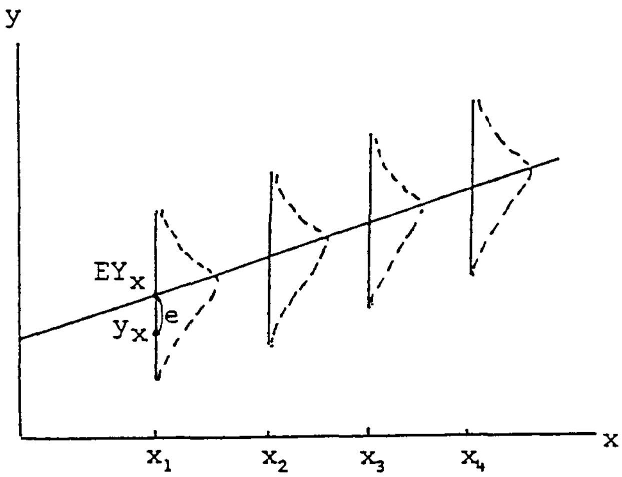


圖 3.1 A linear probabilistic model for fixed independent variable X .

3.1 模式一：獨立變數X是固定的。

對任何一組資料（X，Y），X值是可以控制的而不是隨機變數，對每一個X，一些觀測（ Y's ）被記下來。例如X's可能是五種魚網的網目大小（ 1.40″，1.45″，1.50″，1.55″和1.60″），假設沒有度量的誤差（ Measurement error ），每一頂魚網，拖網數次，漁獲量是Y's。網目大小是可控制的，但是漁獲量是隨機變數，資料如下：

1.40″	1.45″	1.50″	1.55″	1.60″
y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}
y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}	y_{25}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_{n_1 1}$	$y_{n_2 2}$	$y_{n_3 3}$	$y_{n_4 4}$	$y_{n_5 5}$

3.2 模式二：

X和Y均為常態分配，被抽樣的母體是兩變數的常態分配：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{Bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \sigma^2 x & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma^2 y \end{Bmatrix}\right)$$

ρ 是X和Y的相關係數，$\rho\sigma_x\sigma_y$ 是X，Y的變積（ Covariance ）。例如，一個成長的孩童的身高和體重是兩變數（ Bivariate ）的常態分配，兩個線性方程式將是如下：

$$EY_x = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x) \quad (3.3)$$

with $\sigma_{yx}^2 = \sigma_y^2 (1-\rho)$ $\qquad \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \beta$ in (3.1)

and $$EX_y = \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y) \qquad (3.4)$$

with $\sigma_{xy}^2 = \sigma_x^2 (1-\rho)$ $\qquad \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \beta_1$ in (3.2).

不論獨立變數的性質如何，適用（ Fitting ）線式模式的假定是一樣的，一般而言使用的方法是最小平方法（ LS ）。

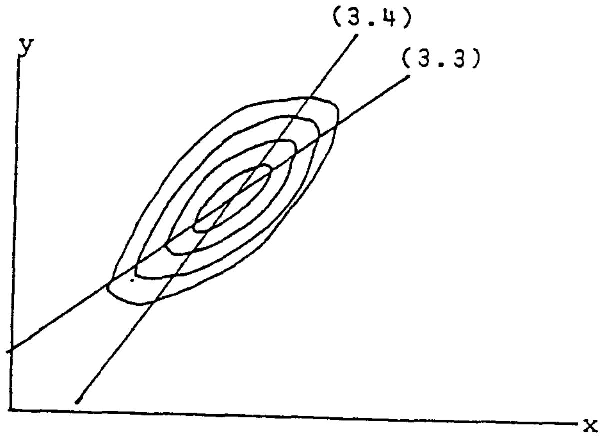


圖 3.2 Linear relationship of X and Y when X and Y are normal r.v.s.

3.3 用LS來估計α和β

當 n 對觀測 (X_1, Y_1)，……(X_n, Y_n) 用來選擇一個線性模式時，LS 估計值 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ 是使觀測值 Y_x 和線上的數值 EY_x 之差的平方總和是最小值。使用 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$，我們找出一條線最靠近 n 對觀測點，這些平方總和（ Sum of squares ; SS ）可以寫成：

$$SS = \Sigma (Y_x - EY_x)^2$$
$$= \Sigma \{ Y_x - (\alpha + \beta x) \}^2 = \Sigma e^2 \qquad (3.5)$$

要使SS方程式(3.5)的值最小，我們須針對 α，β 取SS的微分：

$$\frac{\partial SS}{\partial \alpha} = 0 \qquad (3.6)$$

和 $$\frac{\partial SS}{\partial \beta} = 0 \qquad (3.7)$$

解聯立方程式（3.6）和（3.7），我們即得α和β的 LS 估計值：

$$\hat{\alpha}=\overline{Y}-\hat{\beta}\overline{X} \qquad (3.8)$$

$$\hat{\beta}=\frac{\Sigma(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})}{\Sigma(X-\overline{X})^2} \qquad (3.9)$$

估計線性模式是

$$\hat{Y}_x=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X \qquad (3.10.a)$$

或

$$\hat{Y}_x=\overline{Y}+\hat{\beta}(X-\overline{X}) \qquad (3.10.b)$$

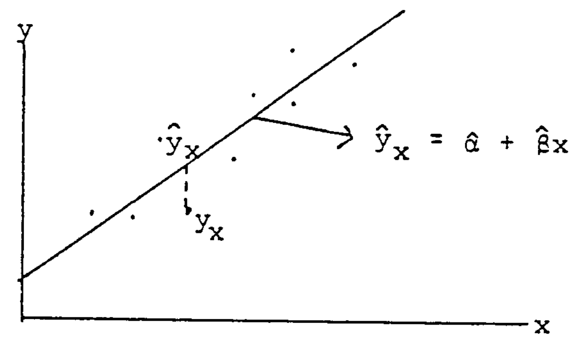


圖 3.3 The linear prediction equation.

共同變異數σ^2是由下列來估計

$$S_{yx}^2=\frac{\Sigma(Y-\hat{Y}_x)^2}{n-2} \qquad (3.11)$$

根據誤差項（e）之常態分配的假定：其平均值是 0，變異數是σ^2，我們能夠建立有關於母數α，β信賴區間和假設檢定和預測值 EY_x。

迴歸係數β之符號說明X和Y之間的正、負和"零"關係。LS 估計值$\hat{\beta}$是一個Y的線性函數，也是常態分配，其平均值是β，變異數是

$$\sigma_{\hat{\beta}}^2=\frac{\sigma^2}{\Sigma(X-\overline{X})^2}$$

i.e. $\hat{\beta}\sim N\left(\beta,\frac{\sigma^2}{\Sigma(X-\overline{X})^2}\right)$

如果σ^2是未知數，$\sigma_{\hat{\beta}}^2$的估計爲

$$s_{\hat{\beta}}^2=\frac{s_{yx}^2}{\Sigma(X-\overline{X})^2} \qquad \text{with } n-2 \text{ d.f.}$$

β的 $1-\alpha$ 信賴區間

$$\hat{\beta}\pm t_{\alpha/2,n-2}\cdot s_{\hat{\beta}}$$

t 檢定法可以用來檢定虛無假設 $\beta=\beta_0$，針對對立假設 $\beta\neq\beta_0$。

where $$t=\frac{\beta-\beta_0}{s_{yx}\sqrt{\dfrac{1}{\Sigma(x-\overline{x})^2}}}\qquad \text{with } n-2 \text{ d.f.}$$

針對一已知 X，Y 的預期值的估計如下：

$$\begin{aligned}\hat{y}_x&=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x\\ &=\overline{y}+\hat{\beta}(x-\overline{x})\end{aligned}$$

因為 $\overline{Y}$ 和 $\hat{\beta}$ 都是常態分配，Y_x 是 $\overline{Y}$ 和 $\hat{\beta}$ 的線性組合，$\hat{Y}_x$ 也將是常態分配，其值為 EY_x，變方為

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\hat{y}_x}&=\sigma_{\bar{y}}^2+(x-\overline{x})^2\cdot\sigma^2_{\hat{\beta}}\\ &=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{\Sigma(x-\overline{x})^2}\cdot(x-\overline{x})^2\\ &=\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{(x-\overline{x})^2}{\Sigma(x-\overline{x})^2}\right)\end{aligned}\qquad(3.12)$$

or $$s^2_{\hat{y}_x}=s^2_{yx}\left(\frac{1}{n}+\frac{(x-\overline{x})^2}{\Sigma(x-\overline{x})^2}\right)\qquad(3.13)$$

EY_x 的 $1-\alpha$ 信賴區間是

$$\hat{y}_x\pm t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{\left\{s^2_{yx}\left(\frac{1}{n}+\frac{(x-\overline{x})^2}{\Sigma(x-\overline{x})^2}\right)\right\}}\quad.$$

從方程式 (3.13) 可看出，$\hat{Y}_x$ 的變異在 X 等於 $\overline{X}$ 時是最小，X 愈遠離 $\overline{X}$，$\sigma_{\hat{y}_x}^2$ 就愈大，如圖 3.4 所示。

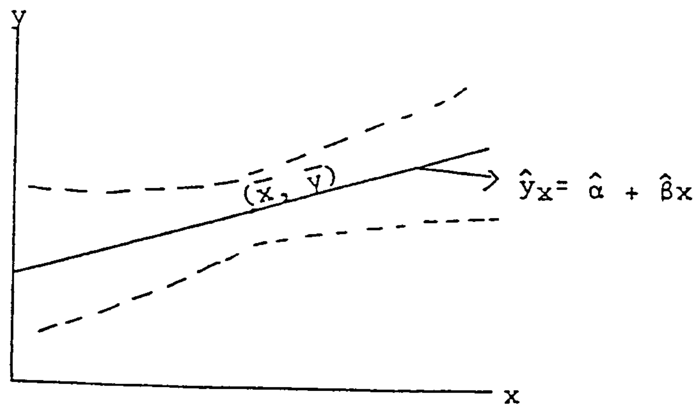


圖 3.4 The confidence band of EYx.

對 EY_x 的假設檢定是同樣的。

至於 α，自方程式 (3.8) 它的 LS 估計值的變方是

$$\sigma_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\Sigma(x-\bar{x})^2} \cdot \bar{x}^2$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\Sigma(x-\bar{x})^2} \right)$$

樣本變方是

$$s_{\hat{\alpha}}^2 = s_{yx}^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\Sigma(x-\bar{x})^2} \right) \qquad (3.14)$$

$\hat{\alpha}$ 也是常態分配變數，其平均值是 α ，變方是

$\sigma_{\hat{\alpha}}^2$ ，α 的 $1-\alpha$ 信賴區間是

$$\hat{\alpha} \pm t_{\alpha/2,n-2} \sqrt{s_{yx}^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\Sigma(x-\bar{x})^2} \right)}\}$$

常常我們欲知資料是否通過原點，其虛無假設將是 $\alpha=0$ 。

例 3.1　下列是仔魚身長（mm）和年齡（時間）（小時）的一些簡化資料，假設成長在 15 週內是直線性之連續變數且成長率相同。

a 、在何極限內我們會 99 %的確定其生長率。

b 、推算 10 週大仔魚的平均身長。

	x_i (time)	y_j (length)	$(x_i-\bar{x})$	$y_j(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$\hat{y}_i$	$(\hat{y}_i-y_i)^2$	y_i^2
	0	63	−5	−315	25	61.4	2.56	3969
	1	66	−4	−264	16	65.4	.36	4356
	2	68	−3	−204	9	69.4	1.96	4624
	3	73	−2	−146	4	73.4	.16	5329
	4	77	−1	− 77	1	77.4	.16	5929
	5	80	0	0	0	81.4	1.96	6400
	6	84	1	84	1	85.4	1.96	7056
	7	89	2	178	4	89.4	.16	7921
	8	96	3	288	9	93.4	6.76	9216
	9	99	4	396	16	97.4	2.56	9801
	10	100	5	500	25	101.4	1.96	10000
TOTAL	55	895	0	440	110		20.56	74601

Solution:　The time period (x_i) is a fixed value. The length (Y) is subject to error, i.e. Y is a random variable.

The LS estimates for β and α are

$$\hat{\beta}=\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}=\frac{\Sigma(x-\bar{x})y}{\Sigma(x-\bar{x})^2}=\frac{440}{110}=4$$

and $$\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}=\frac{895}{11}-4.5=81.4-20=61.4$$

We have

$$\hat{y}_x=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x=61.4+4x$$

The sample variance is

$$s_{yx}^2=\frac{\Sigma(y-\hat{y}_x)^2}{n-2}=\frac{20.56}{11-2}=2.28$$

a、The answer to this question is to construct the 99% c.i. for β. Since $1-\alpha=.99$, we have $\alpha=.01$

$$\hat{\beta}\pm t_{.005,9}\frac{s_{yx}}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}}$$

$$=4\pm 3.25\sqrt{\frac{2.28}{110}}$$

$$=4\pm .47=(3.53,\ 4.47)$$

b、Estimate the average length of a fingerling at week 10.

$$\hat{y}_{10}=61.4+4(10)=101.4$$

$$s_{\hat{y}_{10}}^2=s_{yx}^2\left(\frac{1}{n}+\frac{(x-\bar{x})^2}{\Sigma(x-\bar{x})^2}\right)$$

$$=2.28\left(\frac{1}{11}+\frac{(10-5)^2}{110}\right)$$

$$=2.28\left(\frac{1}{11}+\frac{25}{110}\right)=.7254$$

$$s_{\hat{y}_{10}}=.8517$$

95% c.i. for EY_{10} is

$$\hat{y}_{10}\pm t_{.025,9}\,s_{\hat{y}_{10}}$$

$$=101.4\pm 3.25(.8517)$$

$$=101.4\pm 2.768=(98.632,\ 104.168).$$

例 3.2　在一次加州鯡魚（Herring　）調查中，獲得 4 歲鯡魚魚卵數量和身長的資料：

X length (mm)	Y number of eggs
163	14083
168	16985
168	16380
171	15135

172	13526
176	15052
193	25294
194	24309

a 、迴歸是否顯著？

b 、找出 4 歲鯡魚其魚身長爲 200 mm 之預期魚卵數量的 95 %信賴區間。

Solution： $n = 8$

$\Sigma x = 1405$ $\quad\quad$ $\Sigma y = 140754$

$\Sigma x^2 = 247703$ $\quad\quad$ $\Sigma y^2 = 2624423036$

$\Sigma xy = 25062246$

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x \Sigma y}{n}}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}} = \frac{25062246 - \frac{(1405)(140754)}{8}}{247703 - \frac{(1405)^2}{8}} = 360.389$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = \frac{140754}{8} - 360.389 \cdot \frac{1405}{8} = 17594.25 - 63{,}293.318$$

$$= -45699.068$$

$$y = -45699.068 + 360.389 \cdot x$$

$$s_{y\bar{x}}^2 = \frac{\Sigma(y - \hat{y}_x)^2}{n-2}$$

$$= \frac{\Sigma(y-\bar{y})^2 - \frac{\{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})\}^2}{\Sigma(x-\bar{x})^2}}{n-2}$$

$$= \frac{\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{n} - \frac{\{\Sigma xy - \frac{\Sigma x \Sigma y}{n}\}^2}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}}}{n-2}$$

$$= \frac{147{,}961{,}971 - \frac{\{342324.75\}^2}{949.875}}{6}$$

$$= \frac{24{,}591{,}807}{6} = 4{,}098{,}634.5$$

a 、 $H_0 : \beta = 0$

$H_a : \beta \neq 0$

$$t = \frac{\hat{\beta} - 0}{s_{\hat{\beta}}} = \frac{360.389}{\sqrt{\left\{\frac{s_{y\bar{x}}^2}{\Sigma(x-\bar{x})^2}\right\}}} = \frac{360.389}{\sqrt{\left\{\frac{4{,}098{,}634.5}{949.88}\right\}}} = \frac{360.389}{65.58} = 5.486$$

$t_{.025,6} = 2.44$

$t > t_{.025,6}$

We reject the H_0 and conclude that the regression is significant.

b 、 $\hat{y}_{200} = -45699.068 + 360.389(200) = 26378.732$

$$s^2_{\hat{y}_{200}} = s^2_{yx}\left\{\frac{1}{8} + \frac{(200-\bar{x})^2}{\Sigma(x-\bar{x})^2}\right\}$$

$$= 4098634.5\left\{\frac{1}{8} + \frac{(200-175.625)^2}{949.88}\right\}$$

$$= 3075984.99$$

$s_{\hat{y}_{200}} = 1753.84$

95 % c.i. for EY_{200} is

$\hat{y}_{200} \pm t_{.025,6}\ s_{\hat{y}_{200}}$

$$= 26378.732 \pm 2.44\ (1753.858)$$

$$= 26378.732 \pm 4279.39$$

$$= (21783.809\ ,\ 30658.122)\ .$$

Problem

1. In an experiment at Cultis Lake 3600 numbered tags were put out. The following table gives the number of recoveries by block of 600:

group (X)	recoveries (Y)
1	85
2	81
3	76
4	58
5	60
6	100

Find an equation of the form $EY = \overline{y} + \beta(x-\overline{x})$. Is β significantly different from 0 at the 5% level of significance.

2. The percentage of 1-year-old females and the conditional index of the shrimp indicating the relative average weight of the ocean shrimp from 1964-1973 are as follows:

Year	X(Conditional index)	Y(% of 1-year-old females)
1964	1.28	47
1965	.95	58
1966	1.05	37
1967	1.08	65
1968	1.13	55
1969	.93	48
1970	1.09	55
1971	.75	42
1972	.78	42
1973	1.22	65

Fit a straight line for the data. Test at 5% level that the regression is significant. Construct the 95% c.i. for the % of 1-year-old females when the conditional index is 1.

3. The C/E for barracuda at Coronados Islands, Mexico, and the average of the first six months temperature from 1943 to 1973 is as follows.

Year	x (average temperature of the first 6 months)	$e=y-\hat{y}$	y (C/E) 1000 lb.	$\hat{y}$
1948	14.8	.4827	.893	.41028
49	15.	.2229	.764	.5411
50	14.8	.0697	.48	.41028
51	15.4	-.3117	.491	.8027
52	15.1	.0265	.633	.6065
53	14.7	.0242	.369	.3448
54	15.4	-.2097	.593	.80273
55	15.	-.1751	.366	.5411
56	14.6	-.0824	.197	.2794
57	15.9	0	1.129	1.129
58	16.6	.013	1.6	1.587
59	17.1	.386	2.302	1.914
60	15.6	.5155	1.449	.9335
61	15.4	.019	.821	.802
62	14.8	.323	.733	.410
63	15.4	.2163	1.019	.8027
64	15.2	-.0749	.597	.6719
65	15.2	.1801	.852	.6719
66	15.7	.3851	1.384	.9989
67	15.0	.3009	.842	.5411
68	15.8	-.448	.616	1.064
69	15.3	-.12536	.623	.74834
70	15.3	-.1303	.607	.7373
71	14.5	-.10806	.106	.21406
72	15.3	-.72972	.0076	.73732
73	15.7	-.8509	.148	.9989

Fit a straight line for the data and construct 95% c.i. for the regression coefficient β.

四、抽樣計劃（ Sampling Planning ）—簡單隨機抽樣

在前幾章裏，我們討論到在資料收集之後，對母體作推論的一些基本的統計方法，如果我們屢次使用此一抽樣計劃，以這種方式收集的資料，其樣本多半能代表母體。一個理想的抽樣計劃是在最低成本下得到母體的不偏差的精確推算。抽樣方法有許多，一般說來，可以分成：有目的的選擇（ Purposive selection ）和機率抽樣（ Probability sampling ）。有目的的選擇是抽樣人員主觀地選擇抽樣單位，至於機率抽樣則是按照某種隨機的計劃抽樣。在這章裏，我們將討論一種基本的機率抽樣計劃。

雖然在有些情形下全盤調查（ Census ）是必須的，但是抽樣比起全盤調查，有它的長處：

1. 較便宜。
2. 如果觀測具損壞性，則必須抽樣。
3. 較快速。
4. 在實際上抽樣可能有較精確的結果。因為可僱用高素質的人員，給予精嚴的訓練。

在抽樣調查計劃中，一般程序可以略述如下：

1. 說明調查之目的。
2. 要抽樣的母體定義。
3. 決定要收集的資料。
4. 選擇收集資料方法，如郵寄或訪問。
5. 抽樣單位之選擇。
6. 如何抽樣。
7. 實地工作的組織。
8. 資料分析和摘要。
9. 對將來調查之資料貢獻。

雖然抽樣理論在某些步驟－2 ，3 ，4 和 7 不佔重要角色。但是好的抽樣有賴於各階段的良好工作，某一階段的處理不善，即使其它方面都盡善盡美，都將不利於整個調查。抽樣理論是用來式化（ Formulate ）一個抽樣程序，以便在最低成本下，得到精確且不偏差之母數推算。因此，當比較兩個同樣都可供應精確的母數推算的抽樣計劃時，成本低的一個應認為是較佳者。一般而言，抽樣成本是與樣本大小成正比。因此一個需要少量的樣本而能達到預計的精確推算的抽樣計劃是為較佳者。

簡單隨機抽樣（ Simple Random Sampling ， SRS ）是指在一個抽樣計劃中，母體的

每一個單位都有同樣被抽取的可能性。在大多數的抽樣調查中，觀測單位不退還母體，這叫作不退還抽樣（ Sampling without replacement ）。如果母體是無限的，不退還抽樣和退還抽樣無大區別，但對有限母體，不退還抽樣是須特別留意的。

如果在母體中，有 N 個單元。樣本大小是 n ，根據組合定律，有 C_n^N 種可能的樣本。在 SRS 下，每一樣本被抽取的機會相同。所以觀察任何一樣本的機率是

$$\frac{1}{C_n^N}=\frac{1}{\dfrac{N!}{n!(N-n)!}} \qquad (4.1)$$

如果我們考慮每次抽一單位，則每一樣本單位被抽取的機率是 $\frac{1}{N}$，剩下在母體裏的樣本單位被抽的機率是 $\frac{1}{N-1}$ ，如此一直到 n 單位被抽，因此任一樣本的被抽機率是：

$$n!\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N-1}\cdots\cdots\frac{1}{N-n+1}=\frac{1}{\dfrac{N!}{n!(N-n)!}} \qquad (4.2)$$

n！ 是 n 個抽樣單位的排列，因爲每一單元的位置不關緊要。例如一個母體包括三個單元 A 、 B 和 C ，樣本的大小是 2 ，被抽而不退還，可能的樣本是 AB ， BC 和 AC ，所以有三個結果。如果使用（4.1）式， N＝3 , n＝2 ，則抽到一特別樣本 AB 的機率是：

$$\frac{1}{C_2^3}=\frac{1}{\dfrac{3!}{2!1!}}=\frac{1}{3}$$

4.1 推算值的特性

母體平均值和母體總和，是將推算的參數，例如，漁獲量平均值是母體平均值，Biomass 是母體總和，N 是拖網總數，如果採用 SRS，樣本平均值是母體平均值的不偏差估計，如果我們給予上例A ，B ，C三個數值 1 ， 2 ， 3 ，母體平均值 $\mu=\frac{1+2+3}{3}=2$ ，所有可能樣本，其大小爲 2 ，可列如下：

樣　本 (samples)	觀測量 (observations)	樣本平均值 (sample mean $\bar{y}$)
AB	1 , 2	1.5
AC	1 , 3	2
BC	2 , 3	2.5

μ ，樣本平均值（$\overline{Y}$）的平均值，是

$$\frac{\Sigma\bar{y}}{C_n^N}=\frac{1.5+2+2.5}{3}=2$$

所以 $\mu_{\bar{y}}=\mu_y=2$

來自有限母體的 $\bar{y}$ 的變方定義爲

$$\sigma_{\bar{y}}^2=\frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N} \qquad (4.3)$$

σ^2 是 y 的變方 $=\dfrac{\Sigma(y-\mu_y)^2}{N-1}$

$\dfrac{N-n}{N}$ 稱爲有限母體修正因數（ Finite population correction ， fpc ），如果比率 $\dfrac{n}{N}$ 少於 5 %， fpc 就不用了，因此，如果對母體而言，樣本大小是相對的很小，則一個有限母體可以視爲無限母體。

如果 σ^2 是未知數，樣本變方 s^2 是 σ^2 的不偏差推算。

$$s^2=\frac{\Sigma(y-\bar{y})}{n-1}$$

$\bar{y}$ 的樣本標準誤差是

$$s_{\bar{y}}=\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N}\right)}$$

4.2 樣本大小的決定：

$\bar{y}$ 的標準誤差，$s_{\bar{y}}$，是度量 $\bar{y}$ 的精確度的一種方法。它受幾個因素的影響：y 的標準差 s ，樣本的大小 n ，和抽樣比率 $\dfrac{n}{N}$。 s 的變異是不能控制的，但是增加樣本大小 n ，可以增加 $\bar{y}$ 的精確度。當使用區間估計母體平均值時，特定的區間長度即決定樣本的大小，μ 的 $1-\alpha$ 信賴區間是

$$\bar{y}\pm Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N}\right)}$$

信賴區間的一半濶度

$$d=Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N}\right)} \qquad (4.4)$$

因此

$$n=\frac{\left(\dfrac{Z_{\alpha/2}\,s}{d}\right)^2}{1+\left(\dfrac{Z_{\alpha/2}\,s}{d}\right)^2\dfrac{1}{N}} \qquad (4.5)$$

當 $\dfrac{n}{N}$ 小於 5 %，（4.5）可寫作

$$n=\left(\frac{Z_{\alpha/2}\,s}{d}\right)^2 \qquad (4.6)$$

因此如果參數的區間估計是研究的對象，則樣本大小可以由方程式（4.5）或（4.6

）來決定。統計學家須知多大的推算誤差（d）是生物學家能接納的，區間推算能包括母體平均值的機率和資料的波動性（s^2），然後他們（統計學家）才能計算出樣本的大小。

例 4.1 生物學家欲推算 A 湖的魚體長。大約有 1000 條魚在湖中，從以前的調查資料中變方是 $s^2 = 1.5$。運用 SRS，應該抽取多少魚來推算母體平均值在 0.5 mm 之內，只有 1/20 的機會是不準的。

Solution： $N = 1000$ $d = 0.5$

$s^2 = 1.5$ $Z_{\alpha/2} = 2$

Using equation (4.5), we have

$$n = \frac{\frac{(4)\cdot(1.5)}{.25}}{1 + \frac{(4)(1.5)}{.25}\frac{1}{1000}} = \frac{24}{1.024} = 23.4$$

a sample size of 24 is needed.

另一種度量 $\bar{y}$ 的精確度的公式是變異係數（Coefficient of variation，CV）。$\bar{y}$ 的 CV 是定義爲 $\bar{y}$ 的標準誤差和它的平均值 μ 的比例

$$CV(\bar{y}) = \frac{\sigma_{\bar{y}}}{\mu} \qquad (4.7)$$

如 $\sigma_{\bar{y}}$ 和 μ 是未知數，$s_{\bar{y}}$ 和 $\bar{y}$ 可用作代替

$$CV(\bar{y}) = \frac{s_{\bar{y}}}{y} \qquad (4.8)$$

因爲常常生物參數平均值大的隨機變數的變異大，小的則變異小。而通常CV是一百分比，所以使用比較方便。CV也能用來決定樣本大小，對一種特殊試驗，CV通常是在某一範圍之限度內（Range），如果CV超出了正常限度，研究人員應開始懷疑是否計算錯誤或者特殊情形發生，而對試驗的正確性起了懷疑。我們必須知道沒有 $s_{\bar{y}}$ 和 $\bar{y}$ 的數值而用CV可能會造成誤解。

4.3 母體總和的推算：

母體總和，T_y，通常是用 $\hat{T} = N\bar{y}$ 來推算的。$\hat{T}$ 的樣本變方是

$$s_{\hat{T}}^2 = N^2 s_{\bar{y}}^2 = N^2 \frac{s^2}{n} \frac{N-n}{N} = \frac{s^2}{n} N(N-n)$$

T 的 $1-\alpha$ 信賴區間是

$$\hat{T} \pm t_{\alpha/2, n-1}\, s \sqrt{\left\{\frac{N(N-n)}{n}\right\}} \qquad (4.9)$$

Problem

1. In a population with $N = 6$, the value of y_i are 8, 3, 1, 11, 4 and 7. Calculate the sample mean $\bar{y}$ for all possible simple random samples of size 2. Verify that $\bar{y}$ is an unbiased estimate of μ_y.

2. From a previous survey the sample standard deviation of Ag in N.C. crab tissue is 7.35. In the future analysis how many crabs need to be taken in order to estimate the mean Ag content within 5 apart from a chance of 1 out of 20?

3. The 1973 razor clam survey at South Clam Beach, Ca. had the data for four strata as follows:

Tide Series		Stratum No.	Total Number of Diggers (N_h)	Standard Deviation (s_h)	Average Catch/Digger ($\bar{y}_h$)
-.9 &	Wkday	1	240	6.6	16.8
above	Wkends	2	152	5.75	16.0
-1.0 &	Wkday	3	627	7.12	12.5
below	Wkends	4	800	6.38	13.96

In order to estimate the total catch at the South Beach in 1974 within 1000 clams, how large a sample size should we take? How would you allocate the sample among the strata?

五、變方分析（The Analysis of Variance）

比較兩個母體平均值時，我們用 t 檢定來檢查兩個樣本平均值之不同。推而廣之；要測出 k 個母體平均值之不同，就須用 F 檢定，即 F 檢定統計值。一般檢定 k 個母體平均值相等的虛無假設的方法是檢查 k 個樣本平均值，並將變方分解成兩部份（在最簡單的情形下），一部份是樣本平均值間的變方，另一部份是樣本裏的變方，後者亦稱爲誤差項（Error term）。在虛無假設下，樣本間變方和樣本裏變方的比例應符合 F 分配，所以是一個 F 統計值。數目大的 F 值將導致否定虛無假設。這種變方之分解就叫做變方分析。

5.1 F 統計值

如果兩個樣本之大小分別爲 n_1 和 n_2，獨立來自兩個常態分配。其變方爲 σ_1^2 和 σ_2^2，則 F 統計值被定義爲

$$F_{\nu_1 \nu_2} = \frac{\dfrac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{s_2^2}{\sigma_2^2}} \qquad (5.1)$$

其自由度是 ν_1 和 ν_2

s_i^2 是來自第 i 個母體的樣本變方

$$\nu_i = n_i - 1 \qquad \text{for} \qquad i = 1, 2 \quad 。$$

注意每一 F 統計值有兩個自由度，第一個自由度是聯於分子的樣本變方，第二個是分母的樣本變方的自由度，F 統計值用處之一是檢定兩個變方相等的虛無假設，但是 F 統計值在統計問題上更重要之功用是在變方分析。

5.2 完全隨機設計（Completely randomized design，crd）

完全隨機設計是最簡單的一種情形。通常研究人員欲知曉某一因素（Factor）對他所研究的資料的影響，此因素程度之不同被稱爲處理（Treatment）。每一處理決定一母體。自每一母體中隨機抽一樣本，然後再比較樣本平均值。例如，生物學家可能對魚自不同網目之逃出量感興趣。換言之，生物學家所欲知道的是網目大小的影響。因此我們說這個因素是網目大小，不同網目大小是處理方法。用每一網目隨意拖網所得之量度（Measurements）（魚獲量，或 1 歲仔魚之百分比等等），就是即將分析的資料。用於變方分析之 F 檢定的假設有：

1. 樣本是從 k 個母體隨機抽取的。

2. k 個母體均是常態分配。

3. k 個母體變方相同。

在這些假設中，最重要的是隨機抽樣。非常態分配會導致比實際指定較大的顯著水準。k 個母體之變方不相等時，可以由相等的樣本大小來彌補。總之，稍微與假設不符將不致造成 F 檢定的嚴重誤差（ Error ）。

一個變方分析之程序結構可用下列的例子說明：假如有 k 個處理方法（或 k 個母體），我們要檢定 k 個母體平均值相等的虛無假設，於是我們有

H_0 ： $\mu_1 = \mu_2 = \cdots\cdots = \mu_k$

H_A ： 至少有兩個 μ 是不相等的。

隨機抽取 k 個樣本大小為 n_j 的樣本， $j = 1, \cdots\cdots, k$ 。資料如下：

處理方法（ Treatment ）

$$
\begin{array}{ccccccc}
T_1 & T_2 & \cdots\cdots & T_j & \cdots\cdots & T_k & \\
y_{11} & y_{12} & & y_{1j} & & y_{1k} & \\
y_{21} & y_{22} & & y_{2j} & & y_{2k} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
y_{n_1 1} & y_{n_2 2} & \cdots\cdots & y_{n_j j} & \cdots\cdots & y_{n_k k} & \\
\hline
\bar{y}_1 & \bar{y}_2 & & \bar{y}_j & & \bar{y}_k & , \bar{\bar{y}}
\end{array}
$$

$\bar{y}_j$ 是取自第 j 母體的樣本平均值

$\bar{\bar{y}} = \dfrac{\Sigma\Sigma y_{ij}}{\sum_{j=1} n_j}$ 是總平均值。

所有基於總平均值量度（ Measurements ）的變量（ Variation ）可以用平方總和來表示（ Total sum of squares ， SST ）。

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{\bar{y}})^2 \qquad (5.2)$$

SST 可分成兩個平方和：

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{\bar{y}})^2}_{SST} \qquad (5.3)$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2}_{SSE} + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2}_{SSTr}$$

在公式(5.3)的右邊第一項是代表在每一樣本裏的變量，被稱爲誤差平方和（Error sum of square，SSE）。根據 k 個母體變方相等之假設，SSE 可用來計算辦合（Pooled）樣本變方，此乃爲公有變方（Common variance，σ^2）的不偏推算（Unbiased estimate）。第二項代表樣本間的變方，被稱爲處理之平方總和（Treatment sum of squares，SSTr）。SST 包括量度（Measurement）之間的變量和 k 個母體平均值的變量。檢查 k 個母體平均值之不同的一般方法是比較 SSTr 和 SSE，如果 SSTr 大於 SSE，其結論是 k 個母體之平均值不全相等。變方分析之程序如下：

首先，須知平方和的自由度，以便計算 F 統計值，平方和 SSE 和 SSTr 之自由度各爲 $\sum_{j=1}^{k} (n_j - 1)$ 和 $k-1$。當我們計算樣本變方時，先定義均方誤差（Mean square error，MSE）爲平方和除以它的自由度。因此變方分析表（Analysis of variance table，ANOVA）是：

表 5.1　完全隨機設計之 ANOVA

變量來源 (Source of Variation)	平方和 (Sum of Squares)	自由度 (Degree of Freedom)	均方誤差 (Mean Square Error)	預期值 (Expectation)
Among Samples	$\sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2$	$k-1$	$MSETr = \frac{SSTr}{d.f.}$	$\sigma^2 + n^* \sigma_\mu^2$
Within Samples	$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$	$\sum_{j=1}^{k} (n_j - 1)$	$MSEE = \frac{SSE}{d.f.}$	σ^2

* n 均相等：　$n_j = n$

在 k 個母體平均值相等之虛無假設下，$\sigma_\mu^2 = 0$。MSETr 和 MSEE 之比例符合 F 分配，連同其自由度應爲

$$F_{\nu_1, \nu_2} = \frac{MSETr}{MSEE} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2 / (k-1)}{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 / \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1)}$$

自由度爲：

$$\nu_1 = k - 1$$

$$\nu_2 = \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1)$$

當計算出之 F 值太大時，虛無假設卽被否定。任何統計書籍均有 F 統計值的危險值（ Critical values ）的例表。

欲計算 SS，我們有下列便捷的方法。

表 5.2　完全隨機設計之 ANOVA 計算程序

Type of Total	Total of Squares per Observation	
grand	$(\Sigma\Sigma y_{ij})^2 / \sum_{j=1}^{k} n_j$	(I)
treatment	$\sum_{j=1}^{k} (\sum_{i}^{n_j} y_{ij})^2 / n_j$	(II)
observation	$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}^2$	(III)

ANOVA Table

Source of Variation	Sum of Squares	Degree of Freedom	MS	F
Among Samples	(II) − (I)	$k - 1$		
Within Samples	(III) − (II)	$\Sigma n_j - k$		
TOTAL	(III) − (I)	$\Sigma n_j - 1$		

例 5.1　下列數量代表在產卵地區王鮭（ King salmon ）自標識放流到回收的時間（以星期計算）三個年齡類別是否有顯著的區別？

Solution：　H_0 ：　$\sigma_\mu^2 = 0$ ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$)

H_a ：　$\sigma_\mu^2 \neq 0$ (not all μ_i's are equal)

Samples from

Population 1 (age 3)	Population 2 (age 4)	Population 3 (age 5)
3	4	3
2	9	1
6	5	2
3	6	
1	2	
	3	
	8	
	4	
	7	
	1	
	5	
	6	

	Population 1	Population 2	Population 3	
$\sum_i y_{ij}$:	15	60	6	$\sum\sum y_{ij} = 81$
n_j :	5	12	3	$\sum n_j = 20$
$\bar{y}_j$:	3	5	2	$\bar{y} = 4.05$

$$(\mathrm{I}) = \frac{(\sum\sum y_{ij})^2}{\sum n_j} = \frac{81^2}{20} = 328.05$$

$$(\mathrm{II}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_{ij})^2}{n_j} = \frac{15^2}{5} + \frac{60^2}{12} + \frac{6^2}{3} = 357$$

$$(\mathrm{III}) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}^2$$

$$= 3^2 + 2^2 + \cdots\cdots + 1^2 + 4^2 + 9^2 + \cdots\cdots + 6^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2$$

$$= 435$$

ANOVA Table

Source of Variation	SS	d.f.	MSE	F
Among Samples	28.95	2	14.475	3.1548
Within Samples	78	17	4.588	
TOTAL	106.95	19		

From the F table $F_{2,17,.05} = 3.59$

Since $3.15 < 3.59$ the hypothesis is not rejected at the 5% level of significance.

均方誤差（ MSEE ）是用來推算共同變方 σ^2 ，所以也用來計算母體（ Population ）平均值或兩個母體平均值之差的信賴區間。

μ_i 之 $1-\alpha$ 的信賴區間是

$$\bar{y}_i \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n_i}} \qquad (5.4)$$

$\mu_i - \mu_j$ 之 $1-\alpha$ 的信賴區間是：

$$(\bar{y}_i - \bar{y}_j) \pm t_{\alpha/2}\, s \sqrt{\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} \qquad (5.5)$$

where

$$s = \sqrt{MSEE} = \sqrt{\frac{SSE}{\Sigma(n_i - 1)}}$$

其自由度 $= \Sigma(n_i - 1)$

在例 5.1 中求年齡 3 週和 4 週之平均時間差別的 95 %信賴區間。

運用（5.5）我們可得

$$(3-5) \pm t_{.025\,;\,17} \left\{ 4.588 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{12} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= -2 \pm (2.11)(1.14)$$

$$= (-4.4054 , .4054)$$

例 5.2　比較五種網目所捕獲每磅之海蝦數，1968 年六月～七月 Eureka 商業漁船調查得到下列資料。以 5 %之顯著水準來檢定網目大小對漁獲量無影響的虛無假設。

Solution:

Mesh Sizes	1.31″	1.32″	1.33″	1.34″	1.4″	1.5″	
	106	97	100	100	107	97	
	121	102	94	94	112	112	
	108	101	115	92	94	104	
	100	105	122	106	100	96	
	98	96	95	109	119		
		89	99	100	101		
		91		107			
		98					
		102					
		88					
		83					
		88					
$\sum_i y_{ij}$:	533	1140	625	708	633	409	$\Sigma\Sigma y_{ij} = 4048$

n_j : 5 12 6 7 6 4 $\Sigma n_j = 40$

$\bar{y}_j$: 106.6 95 104.17 101.14 105.5 102.25 $\bar{\bar{y}} = 101.2$

$$(\mathrm{I}) = \frac{(\Sigma\Sigma y_{ij})^2}{\Sigma n_j} = \frac{4048^2}{40} = 409657.6$$

$$(\mathrm{II}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(\sum_{i}^{n_j} y_{ij})^2}{n_j} = \frac{533^2}{5} + \frac{1140^2}{12} + \cdots\cdots + \frac{429^2}{4} = 410432.85$$

$$(\mathrm{III}) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}^2 = 106^2 + 121^2 + \cdots\cdots + 104^2 + 96^2 = 412800$$

ANOVA Table

Source of Variation	SS	d.f.	MSE	F
Among Samples	775.25	5	155.05	2.227
Within Samples	2367.15	34	69.622	
TOTAL	3142.4	39		

$F_{5,34} = 2.5$

since $F < F_{5,34}$, the hypothesis is not rejected at 5% level.

5.3 隨機區集設計 (Randomized block design , rbd)

隨機區集設計 (rbd) 是本章中將介紹的第二種設計。rbd 和 crd 不同處有如成對之 t 檢定和普通的 t 檢定。當用到 rbd 時，實驗單位 (Experimental units) 都將分組，如此在一組內 (Within block) 的變方將小於組間的變方，然後處理方法隨機地分配到每一組內的各個單位。

處理方法 (Treatment)

組別 (Block)	T_1	T_2	………	T_j	………	T_k	
B_1	y_{11}	y_{12}		y_{1j}		y_{1k}	$\bar{y}_{1\cdot}$
B_2	y_{21}	y_{22}		y_{2j}		y_{2k}	$\bar{y}_{2\cdot}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
B_i	y_{i1}	y_{i2}		y_{ij}		y_{ik}	$\bar{y}_i$

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
B_L	y_{L1}	y_{L2}	y_{Lj}	y_{Lk}	$\bar{y}_{L\cdot}$
	$\bar{y}_{\cdot 1}$	$\bar{y}_{\cdot 2}$	$\bar{y}_{\cdot j}$	$\bar{y}_{\cdot k}$	$\bar{\bar{y}}$

平方總和（SS）可以分成三個平方和：

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{L}(y_{ij}-\bar{\bar{y}})^2}_{SST} \tag{5.6}$$

$$=\underbrace{\sum_{j=1}^{k}L(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{\bar{y}})^2}_{SSTr}+\underbrace{\sum_{i=1}^{L}k(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2}_{SSB}+\underbrace{\sum_{i}^{k}\sum_{j}^{L}(y_{ij}-\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y}_{i\cdot}+\bar{\bar{y}})^2}_{SSE}$$

SSB是組平方和，其它的平方和在前已下定義了。

比較公式（5.6）和公式（5.3）可以看出，在（5.3）中的誤差項（ Error term ）是再加分解成兩個平方和。因此如果有組影響（ Block effect ），在 rbd 下的誤差項會比 crd 的誤差項要小。

rbd 的 ANOVA表是列在表 5.3 內：

表 5.3　ANOVA　for rbd

變量來源 (Source of Variation)	平方和 (Sum of Squares)	自由度 (Degree of Freedom)	均方誤差 (Mean Square Error)	預期值 (Expectation)
treatment	$\sum_{j=1}^{k}L(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{\bar{y}})^2$	$k-1$	$MSETr=\frac{SSTr}{d.f.}$	$\sigma^2+L\sigma^2_{\mu_T}$
block	$\sum_{i=1}^{L}k(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2$	$L-1$	$MSEB=\frac{SSB}{d.f.}$	$\sigma^2+k\sigma^2_{\mu_\beta}$
error	$\sum\sum(y_{ij}-\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y}_{i\cdot}+\bar{\bar{y}})^2$	$(k-1)(L-1)$	$MSEE=\frac{SSE}{d.f.}$	σ^2
TOTAL	$\sum\sum(y_{ij}-\bar{\bar{y}})^2$	$kL-1$		

在虛無假設 H_0：$\mu_1=\mu_2=\cdots\cdots=\mu_k$ 或 $\sigma^2_{\mu_T}=0$ 之下，$\frac{MSETr}{MSEE}$ 符合 F 分配，並用來檢定 H_0，$\frac{MSEB}{MSEE}$ 的比率可用來檢定組影響（ Block effect ），即檢定 H_0，$\sigma^2_{\mu_\beta}=0$。

5.4 表給予所有SS便捷的計算公式

表 5.4

Computing Procedure of Analysis of Variance for rbd

Type of Total	Total of Squares per Observation	
grand	$(\Sigma\Sigma y_{ij})^2 / kL$	(Ⅰ)
treatment	$\sum_{j=1}^{k} (\sum_{i=1}^{L} y_{ij})^2 / L$	(Ⅱ)
block	$\sum_{i=1}^{L} (\sum_{j=1}^{k} y_{ij})^2 / k$	(Ⅲ)
observation	$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{L} y_{ij}^2$	(Ⅳ)

ANOVA 表

Source of Variation	Sum of Squares	Degree of Freedom	MS	F
treatment	(Ⅱ)−(Ⅰ)	$k-1$		
block	(Ⅲ)−(Ⅰ)	$L-1$		
error	(Ⅳ)−(Ⅱ)−(Ⅲ)+(Ⅰ)	$(k-1)(L-1)$		
TOTAL	(Ⅳ)−(Ⅰ)	$kL-1$		

例 5.3 下列資料是每一百磅飼料，豬增加的體重。自五窩中，每窩抽取體重相似的三隻。三種飼料（對體重增加）是否有顯著的不同？

Solution：

Litter	Feed 1	Feed 2	Feed 3	$\sum_{j=1}^{3} y_{ij}$	$\bar{y}_{i\cdot}$
1	15	22	25	62	20.67
2	21	23	24	68	22.67
3	22	31	25	68	22.67
4	17	20	23	60	20
5	17	22	26	65	21.67
$\sum_{i=1}^{5} y_{ij}$:	92	108	123		$\Sigma\Sigma y_{ij} = 323$
$\bar{y}_{\cdot j}$:	18.4	21.6	24.6		$\bar{y} = 21.53$

H_0 : $\sigma^2_{\mu_T} = 0$ or $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

$$(\mathrm{I}) = \frac{(\Sigma\Sigma y_{ij})^2}{kL} = \frac{323^2}{3 \times 5} = \frac{104329}{15} = 6955.267$$

$$(\mathrm{II}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(\sum_{i=1}^{L} y_{ij})^2}{L} = (92^2 + 108^2 + 123^2)/5 = 7051.4$$

$$(\mathrm{III}) = \sum_{i=1}^{L} \frac{(\sum_{j=1}^{k} y_{ij})^2}{k} = (62^2 + 68^2 + 68^2 + 60^2 + 65^2)/3 = 6972.333$$

$$(\mathrm{IV}) = \Sigma\Sigma y^2 = 15^2 + 21^2 + \cdots\cdots + 23^2 + 26^2 = 7097$$

ANOVA Table

Source of Variation	SS	d.f.	MSE	F
treatment	96.133	2	48.0665	13.476
block	17.066	4	4.2665	1.196
error	28.534	8	3.56675	
TOTAL	141.733	14		

$F_{2,8,0.05} = 4.46$

since $13.476 > 4.46$, the H_0 is rejected at the 5% level. As to the block effect, the F value for block is not significant at the 5% level (1.196 compard with $F_{4,8,0.05} = 3.8378$) therefore there is no significant difference among the litters and the crb can be used just as weil.

表 5.5 Binomial Probablity Tables

Tabulated values are $P(Y = a \mid n)$

n = 5

a \ P	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.951	.774	.59	.328	.168	.078	.031	.10	.002	0	0	0	0
1	.048	.203	.329	.409	.360	.259	.157	.077	.029	.007	0	0	0
2	.001	.022	.072	.205	.309	.346	.312	.230	.132	.051	.009	.001	0
3	0	.001	.009	.051	.132	.230	.312	.346	.309	.205	.072	.022	.001
4	0	0	0	.007	.029	.077	.157	.259	.36	.409	.329	.203	.05
5	0	0	0	0	.002	.01	.031	.078	.168	.328	.59	.774	.951

n = 10

a \ P	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.904	.599	.349	.107	.028	.006	.001	0	0	0	0	0	0
1	.092	.315	.387	.269	.121	.040	.01	.002	0	0	0	0	0
2	.004	.074	.194	.302	.234	.121	.044	.01	.002	0	0	0	0
3	0	.011	.057	.201	.267	.215	.117	.043	.009	.001	0	0	0
4	0	.001	.011	.088	.200	.251	.205	.111	.036	.005	0	0	0
5	0	0	.002	.027	.103	.201	.206	.201	.103	.027	.002	0	0
6	0	0	0	.005	.036	.111	.205	.251	.200	.088	.011	.001	0
7	0	0	0	.001	.009	.043	.117	.215	.267	.201	.057	.011	0
8	0	0	0	0	.002	.01	.044	.121	.234	.302	.194	.074	.004
9	0	0	0	0	0	.002	.01	.04	.121	.269	.387	.315	.092
10	0	0	0	0	0	0	.001	.006	.028	.107	.349	.599	.904

六、鯷魚（ Anchovy ）魚卵和仔魚之成長（ Growth ）

6.1 魚卵和仔魚養殖實驗（ Lo 1983 ）

在過去十年間，西南中心先後於 1976 和 1981 年作了兩次實驗，蒐集鯷魚魚卵和仔魚成長的資料，以擬定其成長模式。在此章中我們將介紹 1981 年實驗之概況與其資料分析之步驟。

在 1981 年實驗中，母魚利用人工催熟，在 15.8 ℃ 的溫度之下產卵，新生之魚卵即被轉移到三個 10 公升的魚缸中，溫度分別是 13.5，15，和 16.5 ℃ 。每一個鐘頭取出約二十粒魚卵，以鑑定其發育期（ Developmental stage ）。在魚卵孵化（ Hatching ）之後，每四小時取出廿條仔魚，十條用以量標準體長（ Standard length ）。因爲魚卵通常飄在水面，仔魚在水中，所以水面和水中層的溫度皆有記錄。

資料記載

溫　度 (Temperature)	仔　魚 (Larval length for larval growth)	魚　卵 (Egg stage)
Date	Date	Date
Elapsed time (day, hour)	Elapsed time (day, hour)	Elapsed time (days from hatching, hour)
Sample time Begin End Midpoint	Sample time Number of larvae Mean length SD	Sample time Stage I II III IX . . . XI
Sample type (eggs or larvae)		
Surface temp. Middle temp.		Disintegrated Total

6.2 魚卵發育（ Development of anchovy eggs ）

A、魚卵發育階段

鯷魚之魚卵（長軸 1.23～1.55 mm，短軸 0.65 ～ 0.82 mm ）之孵化時間（ Incubation time ; t_i ）是因溫度（ Temp. ）而異，在 15 ℃時是 2.5 天（ Lo 1983 ），t_i 是溫度的降冪數函數。

$$t_i = [18.726e^{-0.125temp}] \qquad (6.1)$$

公式（6.1）的參數是根據下列資料推算出來的。

溫度℃	13.9	16.2	15.2	13.8	15.2	16.6	18.0	19.4	20.8	11.1	12.5
孵化時間											
日	3.03	2.51	2.89	3.33	2.63	2.29	2.04	1.67	1.5	4.71	4.08
小時	72.6	60.3	69.5	80	63	55	49	40	36	113	98
	1981 Lab. Experiment			1976 Lab Experiment							

在孵化期間，卵的發育被分十一個階段（Moser and Ahlstrom 1985）。達到每一階段的時間因溫度而異，從 1981 Lab. 實驗可以推算在三種不同溫度下達到各個階段所需的時間（表 6.1 ）。1981 年資料連同 1976 年資料一起用於選擇魚卵發育模式（ Lo 1985 ）。此模式應用之一是鑑定卵的年齡，更進一步的是推算魚卵的死亡率。

B、魚卵發育模式（ Lo 1985 ）

表 6.1 （ Lo 1985 ）列出在不同溫度下魚卵達到任何一階段所需時間（小時）。

表 6.1 Average age (In hours. minutes) ($y_{i,t}$) of northern anchovy eggs for each of 10 developmental stages (i) (Stage I was not observed) at various temperatures ℃ (t) from laboratory experiments conducted at the SWFC.

	1981 Laboratory Data (Lo 1983)			Zweifel & Lasker (1976)					
Temperature ℃ (t) / Stage (i)	13.9	15.2	16.2	13.8	15.2	16.6	18.0	19.4	20.8
II	6.82	6.42	6.40						
III	16.36	13.55	13.14	20	15	10	9	8	6
IV	24.91	21.12	20.18						
V	35.88	30.7	25.56						
VI	44.63	39.24	33.20	42	35	26	24	21	9
VII	49.64	47.13	38.56						
VIII	52.5	52.07	43.64						
IX	61.1	56.28	50.48	58	50	39	35	33	28
X	66.09	62.63	54.78						
XI	69.79	65.65	56.10	78	65	55	44	39	35

$y_{i,t} = f(i, t)$

i：階段 ， t：溫度℃ ， $y_{i,t}$：是在溫度 t℃時達到 i 階段所須之時間。

在 i^{th} 階段中 $y_{i,t} = a_i e^{b_i t}$ （6.2）

所以 $y_{i,t}$ 是溫度的冪數函數。

在 t℃中 $y_{i,t} = a_t e^{b_t i} i^{c_t}$ （6.3）

因此最後的模式變成

$$y_{i,t} = a e^{(b_i t + b_t i)} i^{c_t} = 16.07 e^{-(0.1145t + 0.098i)} i^{1.74} \quad (6.4)$$

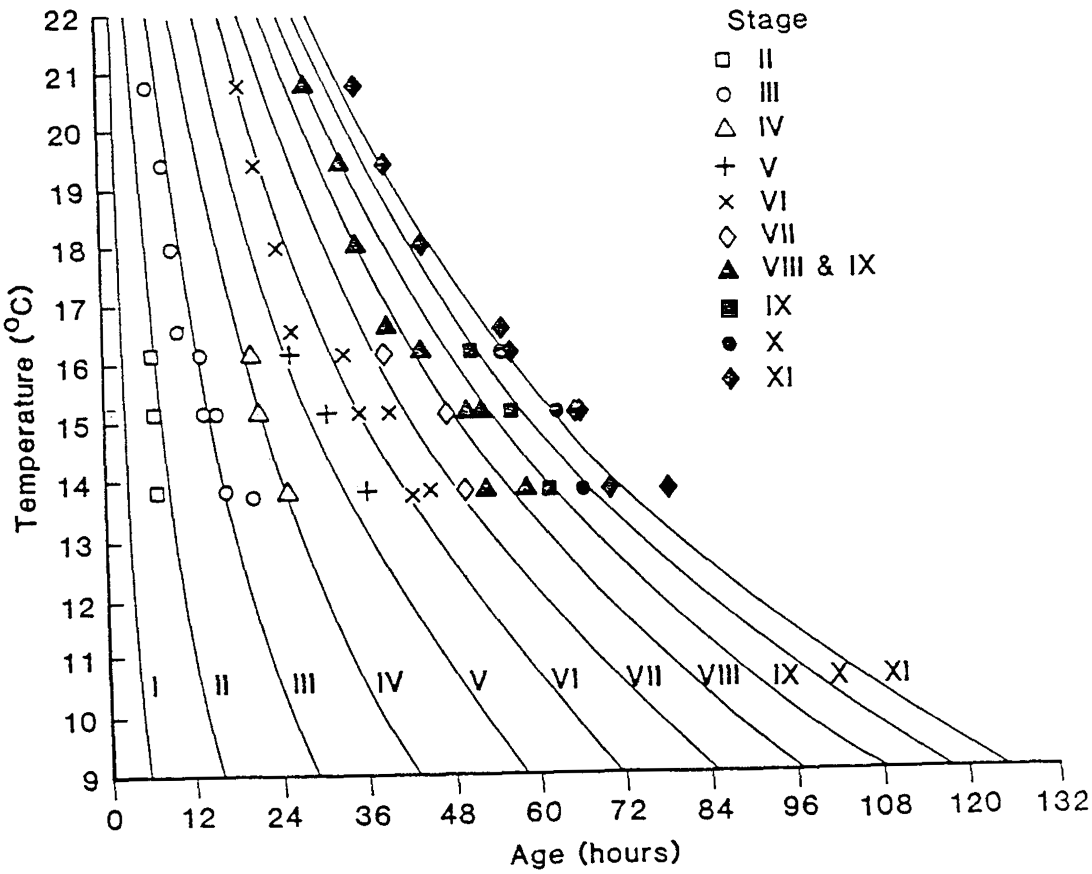


圖 6.1. Observed (denoted by various symbols) and predicted (smooth lines) of time-to-the ith stage as a function of temperature (°C) based upon egg development data collected from two laboratory experiments conducted at SWFC. The predicted values are computed from equation (4).

C、魚卵發育模式應用之一：決定魚卵年齡。

運用圖 6.2（ Lo 1985 ）和拖網時間可以決定魚卵的年齡，這是因爲鯷魚（ Anchovy ）產卵時間短暫，估計在 1800 － 0200 ，高峯是在 2200 。此種方法不適合應用於 24小時連續產卵的魚類。

根據圖 6.2 ，所有在 1800 –0200 觀察的魚卵被列爲新產魚卵（ s ），以後 24 小時的魚卵（ 0200 － 0159 ）是列爲天 0 ，天 1 ，天 2 ，天 3 卵（ A－day ， B－day ， C－day ， D－day ）例如在溫度 16 ℃，晚上 6 點（ 1800 ）收集的魚卵的估計年齡應爲

Stage	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
Age	S	—	A	A	A	B	B	B	B	B	B , C

Day	S	0	0	0	1	1	1	1	1	1 , 2
Hour		20	20	20	44	44	44	44	44	44 , 68

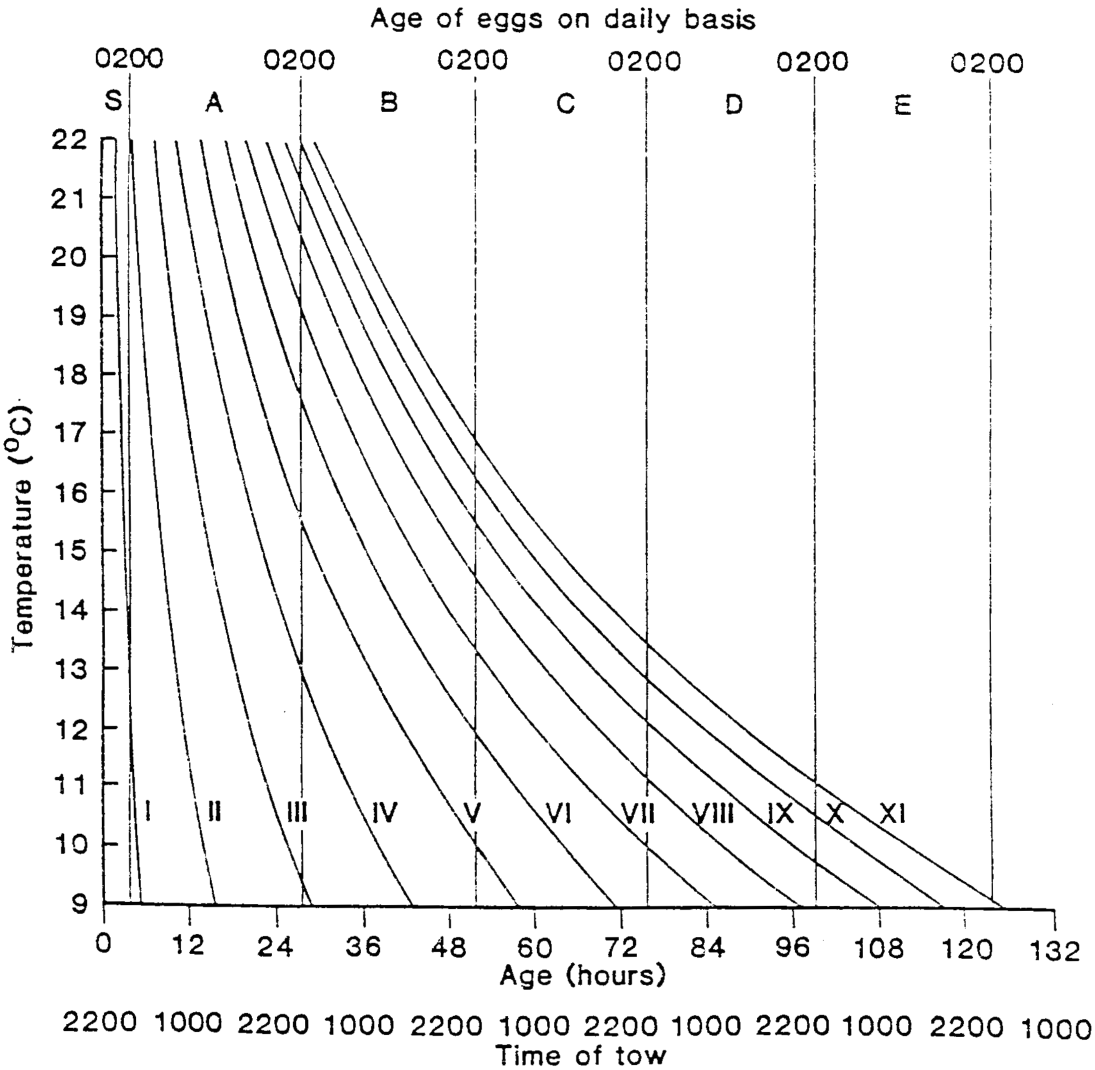


圖 6.2. Function relationship of average age of eggs for the ith stage based upon time of the tow and sea surface temperature (°C).

6.3 推算魚卵年齡之電腦制度（ Automated system ）

因爲所有資料：拖網時間，水溫度，魚卵發育階段的次數（ Frequency ）都貯藏在

電腦中，推算魚卵年齡程序可以自動化。運用下列公式，先立一個參考表，表中列出魚卵階段（i），拖網時間（k）（00:00－23:59），溫度（t）的魚卵年齡（$y_{i,t,k}$）。

$y_{i,t}$ 自公式（6.4）計算來的是平均值。如果魚卵只出現在預期時間 $\hat{T}$（$\hat{T}=\frac{y_{i,t}+ST}{24}$ 的餘數，ST是產卵時間（2200）），則可直接運用公式（6.4）。但是不同階段的魚卵出現於不同時間，所以 $y_{i,t}$ 是不夠用的。簡單而言，如果魚卵在 $\hat{T}$ 小時前被捕，則其年齡應比 $y_{i,t}$ 要小，反之亦然。根據此理，如果魚卵在 k 小時被捕，則其年齡應爲

$$y_{i,t,k}=y_{i,t}+k-\hat{T}$$

但 $y_{i,t,k}$ 應在 $y_{i,t}\pm 2SD_{i,t}$（$SD_{i,t}$ 是年齡 $y_{i,t,k}$ 的標準差）

$$\therefore \text{ if } \quad |k-\hat{T}|\leqslant 2SD_{i,t}$$

$$y_{i,t,k}=y_{i,t}+k-\hat{T}$$

$$\text{if } \quad |k-\hat{T}|>2SD_{i,t}$$

$$y_{i,t,k}=y_{i,t}\pm 2SD_{i,t}$$

$$\text{But} \quad y_{i,t,k}\geqslant 0 \qquad \therefore \quad y_{i,t}\geqslant 2SD_{i,t}$$

所以我們再用一個變數

$$G=\begin{cases} 2SD_{i,t} & y_{i,t}>2SD_{i,t} \\ y_{i,t} & y_{i,t}<2SD_{i,t} \end{cases}$$

$$y_{i,t,k}=\begin{cases} y_{i,t}-G & k<\hat{T}-G \\ y_{i,t}+k-\hat{T} & \hat{T}-G<k<\hat{T}+G \\ y_{i,t}+G & \hat{T}+G<k \end{cases}$$

（表 6.2）（Lo 1985）

最後所有的魚卵均歸併於 S，A，B，C day：S（0－3h），A（4－27h），B（28－51h），C（52－75h），D（76－99h）。（表 6.3）（Lo 1985）

魚卵的年齡的次數（Frequency）可以用作推算魚卵的死亡率。（表 6.4）（Lo 1985）

6.4 魚苗之成長（Growth of anchovy larvae）

A、成長曲線概論（Draper and Smith 1981）

成長曲線，理論上是根據長成率的微分方程（Differential equation）演變出來的。成長曲線不只用於描述魚體長和體重的成長，亦用於推算整個魚族群的成長。

如果 y_t 是魚在年齡 t 的體長，瞬間成長率（Instantaneous growth rate），g(t)

$=\frac{dy_t}{dt}\cdot\frac{1}{y_t}$ 。幾種常用之生長模式列舉如下：

瞬間成長率（g(t)）	生長模式	
α	$y_t=y_0\,e^{\alpha t}$	Exponential
$\alpha\left[\left(\frac{y_\infty}{y_t}\right)^\beta-1\right]$	$y_t=y_\infty\left(1-k\,e^{-\alpha\beta t}\right)^{\frac{1}{\beta}}$	von Bertalanffy
$\alpha\left[1-\left(\frac{y_t}{y_\infty}\right)^\beta\right]$	$y_t=y_\infty\left(1+\beta e^{-\alpha\beta t}\right)^{-\frac{1}{\beta}}$	Richards
$\alpha\left[1-\frac{y_t}{y_\infty}\right]$	$y_t=y_\infty\left(1+e^{k-\alpha t}\right)^{-1}$	Logistic
$\alpha e^{-\beta t}$	$y_t=y_\infty\,e^{-\frac{\alpha}{\beta}e^{-\beta t}}$	Gompertz

B、鯷魚仔魚成長模式

鯷魚仔魚之成長模式是分成兩個階段來研究的，在卵黃囊期（Yolk－sac），仔魚成長是因溫度而異，成長資料來自實驗室養殖之仔魚。但自攝食（First feeding；FF）之後，溫度的影響似乎被其它環境因素所掩蓋而不顯著，成長資料來自海中採取的樣本。

我們用兩個公式分別代表 Yolk－sac 和攝食以後的成長模式，成長模式是採用 Gompertz 公式

$$L_t=L_\infty\left(\frac{L_k}{L_\infty}\right)^{\mathrm{EXP}\{-\alpha(t-t_k)\}}$$

$$=L_\infty\,e^{\ln\left(\frac{L_k}{L_\infty}\right)\mathrm{EXP}[-\alpha(t-t_k)]} \qquad (6.5)$$

L_t 是自卵受精後 t 日的魚體長

t_k 是在考慮之年齡期間的最小年齡（日）

L_k 是在年齡 t_k 日時的魚體長

α 是成長係數

L_∞ 是考慮之年齡期間之最大魚體長

公式（6.5）是從瞬間成長率演變出來的

$$\frac{dL_t}{dt}\cdot\frac{1}{L_t}=\lambda e^{-\alpha(t-t_k)}$$

λ 是在年齡 t_k 時的瞬間成長率

a、卵黃囊期的成長模式（Up to 5 days old）

仔魚在此期間之成長與溫度有關，所以我們先考慮各溫度下之成長資料來估計成長曲線的參數：在此階段 t_k（最小年齡）是孵化時間（Hatching time），孵化時間又

表 6.2 Partial listing of the look-up table. Each entry is the estimated age (in hours.minutes) for stage IV for each combination of time of tow (1 to 24 hours) and temperature (10 to 22℃). The asterisk (*) indicates the estimated age corresponding to the expected time of tow ($\hat{T}$) (see Tables 2a & 2b, Lo 1983). Row 25 is for random assignment of ages for eggs observed at 12 hours before or after the expected time of tow.

Time of tow (k)	Temperature (°C) 10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	28.25	27.28	27.57	27.50	27.02	27.32	26.19	24.20	6.34	4.60	3.35	3.20	3.13
2	28.25	28.28	28.57*	28.50	28.02	28.32	26.19	8.20	6.34	4.60	4.35	4.20	4.13
3	29.25	29.28	29.57	29.50	29.02	28.32	26.19	8.20	6.34	5.60	5.35	5.20	5.13
4	30.25	30.28	30.57	30.50	30.02	28.32	10.19	8.20	6.34	6.60	6.35	6.20	6.13
5	31.25	31.28	31.57	31.50	31.02	28.32	10.19	8.20	7.34	7.60	7.35	7.20	7.13
6	32.25	32.28*	32.57	32.50	31.02	12.32	10.19	8.20	8.34	8.60	8.35	8.20	8.13
7	33.25	33.28	33.57	33.50	31.02	12.32	10.19	9.20	9.34	9.60	9.35	9.20	9.13*
8	34.25	34.28	34.57	33.50	31.02	12.32	10.19	10.20	10.34	10.60	10.35	10.20*	10.13
9	35.25	35.28	35.57	33.50	15.02	12.32	11.19	11.20	11.34	11.60	11.35*	11.20	11.13
10	36.25*	36.28	36.57	33.50	15.02	12.32	12.19	12.20	12.34	12.60*	12.35	12.20	12.13
11	37.25	37.28	36.57	17.50	15.02	13.32	13.19	13.20	13.34	13.60	13.35	13.20	13.13
12	38.25	38.28	36.57	17.50	15.02	14.32	14.19	14.20	14.34*	14.60	14.35	14.20	14.13
13	39.25	39.28	36.57	17.50	15.02	15.32	15.19	15.20	15.34	15.60	15.35	15.20	15.13
14	40.25	40.28	20.57	17.50	16.02	16.32	16.19	16.20*	16.34	16.60	16.35	16.20	16.13
15	41.25	40.28	20.57	17.50	17.02	17.32	17.19	17.20	17.34	17.60	17.35	17.20	17.13
16	42.25	40.28	20.57	18.50	18.02	18.32	18.19*	18.20	18.34	18.60	18.35	18.20	17.13
17	43.25	40.28	20.57	19.50	19.02	19.32	19.19	19.20	19.34	19.60	19.35	18.20	17.13
18	44.25	24.28	20.57	20.50	20.02	20.32*	20.19	20.20	20.34	20.60	19.35	18.20	17.13
19	44.25	24.28	21.57	21.50	21.02	21.32	21.19	21.20	21.34	20.60	19.35	18.20	1.13
20	44.25	24.28	22.57	22.50	22.02	22.32	22.19	22.20	22.34	20.60	19.35	2.20	1.13
21	44.25	24.28	23.57	23.50	23.02*	23.32	23.19	23.20	22.34	20.60	3.35	2.20	1.13
22	28.25	24.28	24.57	24.50	24.02	24.32	24.19	24.20	22.34	4.60	3.35	2.20	1.13
23	28.25	25.28	25.57	25.50*	25.02	25.32	25.19	24.20	22.34	4.60	3.35	2.20	1.13
24	28.25	26.28	26.57	26.50	26.02	26.32	26.19	24.20	6.34	4.60	3.35	2.20	2.13
25	44.25	40.28	36.57	33.50	31.02	28.32	26.19	24.20	22.34	20.60	19.35	18.20	17.13

表 6.3 Partial listing of the output data file (FOR026.DAT) for 1983: Cruise identification, tow time, temperature, number of eggs and estimated ages (in hours) grouped by S(0-3 h), A(4-27 h), B(28-51 h), C(52-75 h), D(76-99 h) and total number for each tow. Disintegrated eggs are obtained by subtraction. E day eggs (100-123 h) are not observed for northern anchovy and thus are not included in the output.

Cruise No.	Tow No.	CalCOFI Line	CalCOFI Station	Stratum	Weighting Factor	Date	Region	Tow Time	Temperature °C	Day Categories* S		A		B		C		D		Total
302	17	741	550	1	1.000	830205	1	23 28	14	0.	1.	1.	25.	0.	48.	0.	71.	0.	0.	1.
302	18	741	540	1	1.000	830206	1	24 20	14	0.	2.	0.	20.	1.	50.	0.	71.	0.	0.	1.
302	19	741	530	1	1.000	830206	1	1 13	14	0.	3.	0.	20.	3.	51.	0.	65.	0.	0.	3.
302	24	750	465	1	1.000	830206	1	6 19	14	0.	0.	0.	7.	0.	37.	0.	58.	0.	0.	0.
302	26	750	500	1	1.000	830206	1	15 39	15	0.	0.	0.	16.	0.	41.	2.	62.	0.	0.	2.
302	27	750	510	1	1.000	830206	1	17 17	15	0.	2.	0.	19.	0.	43.	0.	64.	0.	0.	0.
302	29	750	520	1	1.000	830206	1	22 32	15	0.	2.	0.	24.	0.	48.	0.	66.	0.	0.	0.
302	30	750	530	1	1.000	830206	1	23 11	14	0.	1.	0.	19.	0.	48.	0.	71.	0.	0.	0.
302	31	750	540	1	1.000	830207	1	24 8	14	0.	2.	0.	20.	2.	50.	0.	71.	0.	0.	3.
302	32	750	550	1	1.000	830207	1	24 49	14	0.	2.	0.	20.	0.	49.	2.	69.	0.	0.	2.
302	33	750	560	1	1.000	830207	1	1 47	14	0.	3.	0.	20.	0.	46.	2.	57.	0.	0.	2.
302	34	750	570	1	1.000	830207	1	2 31	14	0.	0.	0.	5.	0.	34.	1.	57.	0.	0.	1.
302	38	758	600	1	1.000	830207	1	6 16	14	0.	0.	0.	7.	0.	37.	2.	56.	0.	0.	2.
302	39	758	590	1	1.000	830207	1	7 20	14	0.	0.	0.	7.	0.	34.	2.	57.	0.	0.	2.
302	40	758	580	1	1.000	830207	1	8 7	14	0.	0.	0.	8.	0.	35.	2.	58.	0.	0.	2.
302	41	758	570	1	1.000	830207	1	8 52	14	0.	0.	0.	8.	0.	35.	0.	59.	0.	0.	0.
302	42	758	560	1	1.000	830207	1	9 34	14	0.	0.	0.	10.	0.	36.	0.	59.	0.	0.	0.
302	43	758	550	1	1.000	830207	1	10 39	14	0.	0.	0.	11.	0.	37.	2.	60.	0.	0.	2.
302	44	758	540	1	1.000	830207	1	11 22	14	0.	0.	0.	11.	0.	38.	2.	61.	0.	0.	2.
302	45	758	530	1	1.000	830207	1	12 0	15	0.	0.	0.	13.	1.	38.	1.	62.	0.	0.	2.
302	46	758	520	1	1.000	830207	1	12 35	15	0.	0.	0.	13.	0.	38.	3.	61.	0.	0.	3.
302	47	758	510	1	1.000	830207	1	13 16	15	0.	0.	0.	15.	0.	40.	0.	63.	0.	0.	0.
302	49	758	495	1	1.000	830207	1	14 30	15	0.	0.	0.	16.	0.	40.	0.	63.	0.	0.	0.
302	50	767	480	1	1.000	830207	1	17 9	15	0.	0.	0.	17.	0.	43.	0.	64.	0.	0.	0.
302	51	767	490	1	1.000	830207	1	18 28	15	0.	2.	0.	20.	1.	44.	0.	64.	0.	0.	1.
302	52	767	500	1	1.000	830207	1	20 46	15	0.	2.	0.	23.	0.	47.	0.	66.	0.	0.	0.
302	53	767	510	1	1.000	830207	1	22 25	15	0.	2.	3.	24.	1.	48.	0.	66.	0.	0.	4.
302	54	767	520	1	1.000	830208	1	24 43	15	0.	3.	0.	21.	0.	49.	0.	54.	0.	0.	0.
302	55	767	530	1	1.000	830208	1	1 31	15	0.	3.	0.	22.	0.	50.	0.	54.	0.	0.	0.
302	56	767	540	1	1.000	830208	1	2 17	15	0.	0.	0.	4.	1.	28.	0.	53.	0.	0.	1.
302	57	767	550	1	1.000	830208	1	3 6	15	0.	0.	1.	5.	1.	29.	0.	53.	0.	0.	2.
302	58	767	560	1	1.000	830208	1	5 28	15	0.	0.	0.	6.	1.	31.	0.	54.	0.	0.	1.
302	59	767	570	1	1.000	830208	1	6 22	14	0.	0.	0.	7.	1.	32.	0.	58.	0.	0.	1.
302	64	775	590	1	1.000	830208	1	14 14	14	0.	0.	0.	15.	1.	38.	0.	64.	0.	0.	1.
302	65	775	580	1	1.000	830208	1	14 53	14	0.	0.	0.	15.	0.	41.	0.	64.	0.	0.	0.
302	66	775	570	1	1.000	830208	1	15 29	15	0.	0.	0.	16.	0.	41.	1.	62.	0.	0.	1.
302	67	775	560	1	1.000	830208	1	16 15	15	0.	0.	0.	17.	1.	42.	1.	66.	0.	0.	2.
302	68	775	550	1	1.000	830208	1	17 3	14	0.	0.	0.	18.	0.	44.	0.	67.	0.	0.	0.

*Under each day category are number of eggs and age (in hours).

表 6.4　Partial listing of the data file (FOR038.DAT): Cruise ID, number of eggs and age (in days) excluding eggs older than 2.5 days old.

Cruise No.	Tow No.	CalCOFI Line	CalCOFI Station	Date	Number of Eggs	Age (in days)
302	6	0733	0550	830205	0.0000	0.4583
302	6	0733	0550	830205	0.0000	1.5694
302	6	0733	0550	830205	1.0000	2.5417
302	17	0741	0550	830205	1.0000	1.0417
302	17	0741	0550	830205	0.0000	2.0104
302	17	0741	0550	830205	0.0000	2.9583
302	18	0741	0540	830206	0.0000	0.8229
302	18	0741	0540	830206	1.0000	2.0833
302	18	0741	0540	830206	0.0000	2.9583
302	19	0741	0530	830206	0.0000	0.8438
302	19	0741	0530	830206	3.0000	2.1250
302	19	0741	0530	830206	0.0000	2.7083
302	24	0750	0485	830206	0.0000	0.2778
302	24	0750	0435	830206	0.0000	1.5208
302	24	0750	0485	830206	0.0000	2.3958
302	26	0750	0500	830206	0.0000	0.6667
302	26	0750	0500	830206	0.0000	1.7083
302	26	0750	0500	830206	2.0000	2.5833
302	27	0750	0510	830206	0.0000	0.7917
302	27	0750	0510	830206	0.0000	1.7813
302	27	0750	0510	830206	0.0000	2.6667
302	29	0750	0520	830206	0.0000	0.9896
302	29	0750	0520	830206	0.0000	2.0000
302	29	0750	0520	830206	0.0000	2.7500
302	30	0750	0530	830206	0.0000	0.8021
302	30	0750	0530	830206	0.0000	2.0104
302	30	0750	0530	830206	0.0000	2.9583
302	31	0750	0540	830207	0.0000	0.8229
302	31	0750	0540	830207	2.0000	2.0833
302	31	0750	0540	830207	0.0000	2.9583
302	32	0750	0550	830207	0.0000	0.8229
302	32	0750	0550	830207	0.0000	2.0417
302	32	0750	0550	830207	2.0000	2.8750
302	33	0750	0560	830207	0.0000	0.8438
302	33	0750	0560	830207	0.0000	1.9063
302	33	0750	0560	830207	2.0000	2.3750
302	34	0750	0570	830207	0.0000	0.2083
302	34	0750	0570	830207	0.0000	1.4271
302	34	0750	0570	830207	1.0000	2.3750
302	38	0758	0600	830207	0.0000	0.2778
302	38	0758	0600	830207	0.0000	1.5208
302	38	0758	0600	830207	2.0000	2.3333
302	39	0758	0590	830207	0.0000	0.3056
302	39	0758	0590	830207	0.0000	1.4167
302	39	0758	0590	830207	2.0000	2.3750
302	40	0758	0580	830207	0.0000	0.3333
302	40	0758	0580	830207	0.0000	1.4375

是因溫度而異（見魚卵發育6.2節），一共有6種不同的溫度，三個是在1981年實驗中的溫度，其它三個溫度是以前實驗結果（Lo 1983）。

Temp, ℃	L_∞(mm)	L_k (mm)	α	n	t_k (hatching time ; days)
13.47	4.166	3.11	0.551	30	3.48
14.00	4.21	2.27	0.78	7	3.25
15.03	4.328	2.86	0.556	30	2.86
16.23	4.287	2.84	0.9438	11	2.46
17.00	4.546	2.406	1.1543	8	2.24
20.00	4.152	2.40	1.71	10	1.54

在三個參數中 L_k 和 α（成長係數）受溫度的影響，α 是最敏感的，所以我們決定將 α 寫成溫度的函數。在決定最後曲線時 $t_0 = 0$，L_0是不受溫度影響，但本身無任何生物上的意義。

$$\alpha_{temp} = 0.11\,e^{0.12\,(temp)}$$

最後的模式是

$$L_t = 4.25\,(\frac{0.32}{4.25})\,e^{-0.11\,e^{0.12\,(temp.)}\,(t-t_0)} \qquad \text{for } t < 6.3 \text{ days}$$

（圖6.3）（Lo 1983）

b、仔魚〔4.1 mm－27 mm；＞6 days old (FF)〕的成長模式（Methot and Kramer 1979；Methot and Hewitt 1980）。

資料收集：資料來自1976－1979海上調查（1976：三，五月；'77：三月；'78：一，四，五，八月；'79：一月）。用的魚網有1米圈網（1m Ring net），Bongo net（60cm直徑）和Manta Neuston net。網目大小皆爲505 μm，自不同的深度斜拖網。樣本是保存在85％ Ethanol（氨基乙醇），海面溫度亦記錄下來，資料收集地點是南加州海灣：Anchovy 產卵主要地區之內。

收集的魚卵和仔魚都經分類。魚體長是量自吻部（Snout）的尖端。尺度準確到0.1mm。矢石（Sagittae）被移出而放在顯微鏡下，平的一面朝上。偏光濾波器和偏光鏡（Polarizing filter & Analyser）用於顯微鏡之下使耳骨更顯明。切片晾乾後放在一片蓋玻片之下（Pro－texx），在影像銀幕（Video screen）上的骨片，用以數算骨輪，顯微鏡放大量是600×或1500×。每一耳骨皆有一到三個觀測值。三個數目的平均數用以推算此耳骨的骨輪，骨輪是用來表示卵黃囊吸收後的日數年齡。

仔魚（After FF）的成長曲線之成長係數似乎是因月份而變，與溫度之關係不顯

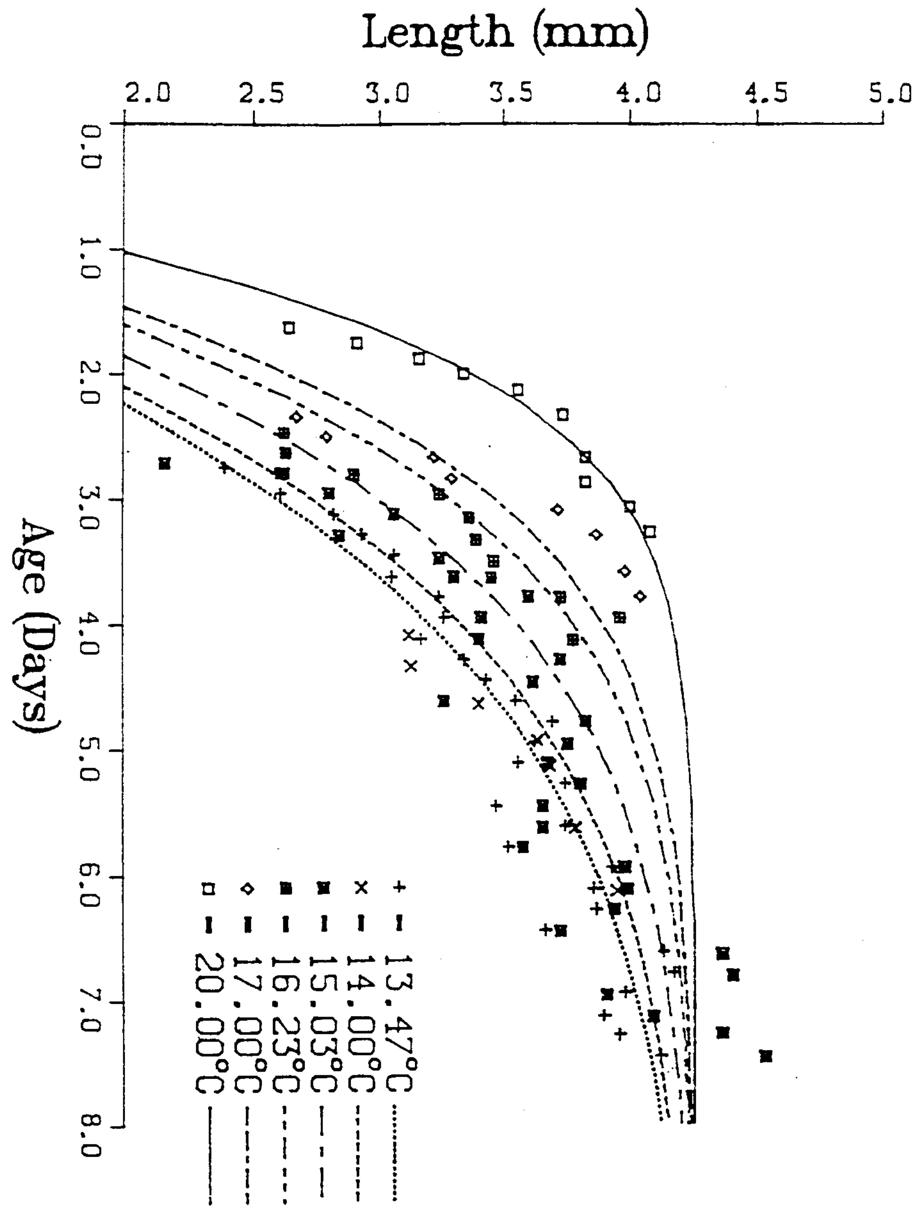


圖 6.3. Growth curves of yolk-sac stage of anchovy larvae at various temperatures.

著。以下是因月份而異之仔魚成長率推算值（α）：

月份	一	二	三	四	五	六	七	八
α	0.0462	0.0481	0.0501	0.0523	0.0547	0.0573	0.0602	0.0634

$$\alpha_{month} = [22.4786 - 0.8374\,(\text{month})]^{-1}$$

攝食後仔魚之成長模式爲：

$$L_t = 27\left(\frac{4.1}{27}\right)^{e^{-\alpha_{month}\cdot(t-6.28)}} \qquad \text{for } 6.3 < t < 60 \text{ days}$$

七、鯷魚（Anchovy）魚卵和仔魚之死亡（Mortality）推算

7.1 資料收集與處理

資料收集是由 California Cooperative Oceanic Fisheries Investigation（CALCOFI）每年調查所得的。CALCOFI 是一個由美國商務部（National Marine Fisheries Service, Department of Commerce）、加州大學 Scripps Institute of Oceanography，和加州漁獵部合作的研究組織。調查範圍包括 20°N 到 40°N，110°W 到 130°W。調查站是按觀測線設置的，每一條線上有固定的測站，每一站上分別用兩種不同的浮游生物網來捕獲魚卵和仔魚（圖 7.1）。

A、魚網

a、魚卵垂直魚網（Calvet：California vertical net）：架圈的直徑爲 0.25 m，網長 1.5 m，表面面積爲 0.05 m^2，濾水面積（Filtering surface）是 0.87 m^2，尼龍 Nitex 魚網之網目大小是 0.150 mm。操作程序是以 70 m/min 速度達到深度 70 m 時，停留 10 秒鐘再以 70 m/min 速度將網收回。

b、仔魚 Bongo net：是無支索的浮游生物網（Bridle－free plankton net）。Bongo net 長 3.4 m 具有兩個直徑 0.71 m 圓形鋁架。由一個中心軛所聯接，再接上曳網，在鋁圈下裝一個 22 公斤的重錘，使網能被斜拖（Oblique tow）。曳速是 50 m/min（Smith 1977）。

B、資料記載

每一拖網均須填寫一拖網資料表（Tow－Data sheet）（圖 7.2），其中項目甚多，爲了計算產卵的魚總量（Spawning biomass），所有魚卵或仔魚數量均須換成一個標準單位（例如 10 m^2）的魚獲量，我們須計算魚網之滲水總量（Volume of H_2O strained）和拖網深度（Depth of tow in meters），換算 10 m^2 之魚獲量公式則爲：

$$X \cdot \frac{10}{\frac{\text{Volume of } H_2O}{\text{Depth of tow}}} = X \cdot SHF$$

X 是實際之魚獲量觀測量

$$\frac{10}{\text{Volume of } H_2O/\text{Depth of tow}} = \text{Standard haul factor} = SHF$$

Volume of water = a · b

a：Area of month of net

b：Length of tow path

b =（Meter／Revolution）·（No of revolutions of the flow meter）

Depth of tow = Maximun length of wire out · cos（$\tan^{-1}\overline{T}$）′

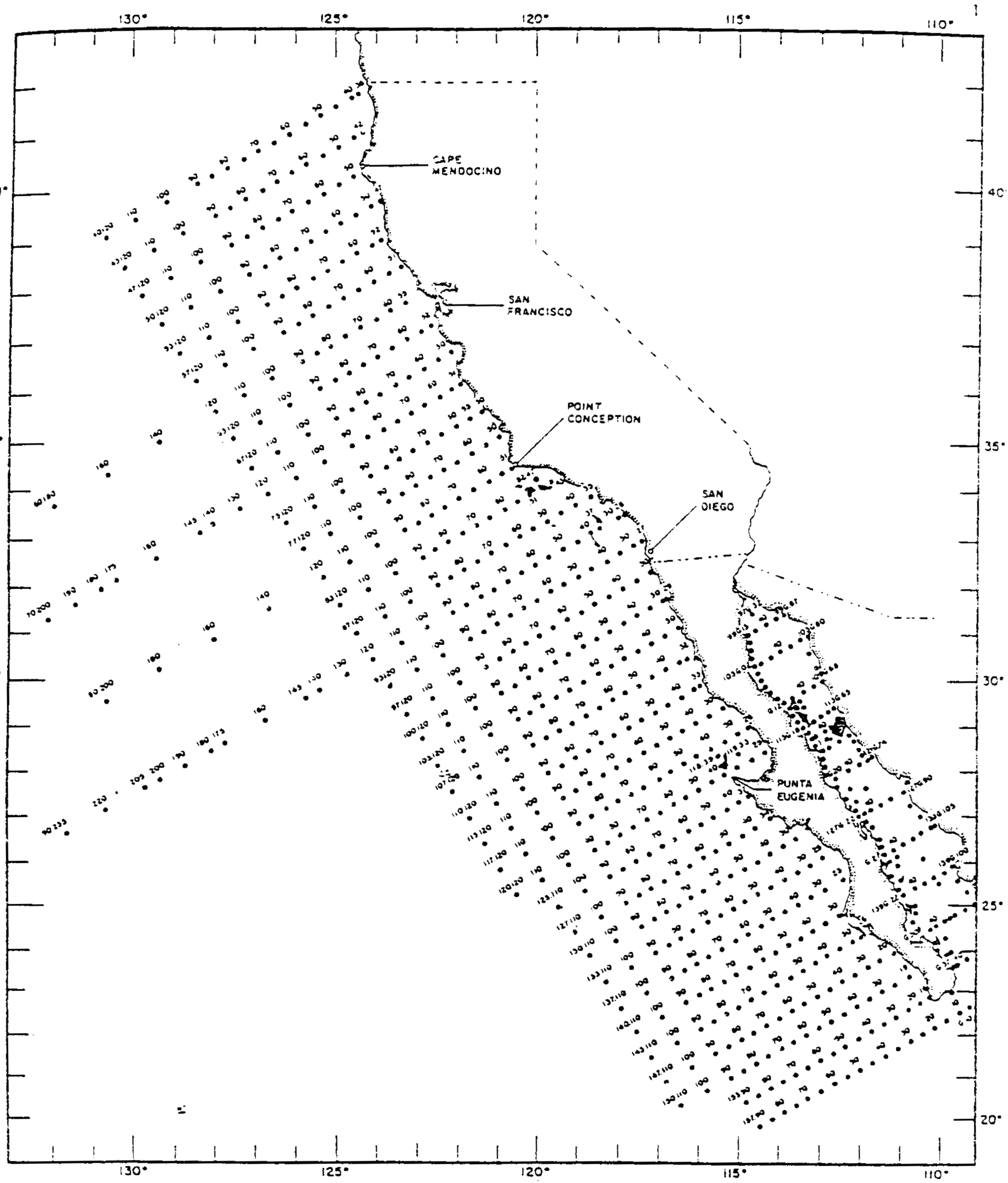


圖 7.1　CALCOFI BASIC STATION PLAN SINCE 1950

圖 7.2 NET TOW DATA SHEET

Cruise	Ship	Order Occupied	Station Line	Station	Date yr. mo. day	Hour (PST) Begin Tow	End Tow

TIME min. sec.

SINKING: (DESCEND)

TOWING: (AT DEPTH)

TOTAL (ASCEND)

AMT. OF WIRE OUT ______ METERS

TOTAL NO. OF ANGLES

	PORT		STB.
MESH			
NET NO.			
METER NO.			
CARRYOVER			
FINAL			
INITIAL			
DIFF.			

ACCEPTED POSITION ___° ___' ___N. LATITUDE ___° ___' ___W. LONGITUDE

TOW TYPE:

TOW NO.______of ______

ERROR CODE: Port___/___ Stb___/___

BUCKET TEMP. °C :

ANGLES										
WIRE OUT	300	290	280	270	260	250	240	230	220	210
ANGLES										
WIRE OUT	200	190	180	170	160	150	140	130	120	110
ANGLES										
WIRE OUT	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10

ANGLES										
WIRE OUT	At Depth	Halfway	Surface							
ANGLES										
WIRE OUT										
ANGLES										
WIRE OUT										

NO. OF JARS PORT P Q G STB. P Q G

WIND ° DIRECTION KNOTS

SKY (CONDITION)

FORMALIN & BORATE ADDED

SEA (CONDITION)

SWELL ° DIRECTION FT. HEIGHT

ALCOHOL ADDED

NET CLOGGING (CHECK ONE): NONE OR SLIGHT | MODERATE | HEAVY | VERY HEAVY

COLLECTORS INIT.

NET WASHING (CHECK ONE): NONE | RINSED | WASHED

BOTTOM DEPTH ______ METER FATHOMS

RIPS & HOLES IN NET: NONE | LOCATION: | WHEN MENDED: BEFORE STA. | AFTER STA.

REMARKS:

OBSERVER:

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tan \theta_i$$

$\begin{cases} \theta \text{ is the wire angle.} \\ n \text{ is the number of } \theta \text{ measured at various wire out.} \end{cases}$ （見圖 7.2 ）

（ Smith 1977 ）

SHF 可用以換算不同漁網收集的資料，例如 Vertical tow 和 Bongo tow。

C 、資料處理

所有標本帶回試驗所以後，魚卵和仔魚經由分類員（ Sorter ）分類，記錄於 Sorter tally－data 中。魚卵和仔魚數量則經由電腦分別記載於魚卵和仔魚資料庫（ Data base ）中。統計分析則根據此 Data base 中的資料，其它的 Data base 有 1.調查站活動 Data base 2.海洋資料 Data base 3.生物資料 Data base 4. Cruise specification data base 。（圖 7.3 ）。

7.2 魚卵之死亡推算（ Lo 1985 ）

對於一系魚卵，P_t 是年齡 t day 的魚卵數，$t=0, 1, \cdots\cdots, t_h$；$t_h$ 是孵化年齡〔 t_h＝第六章的 t_i （公式 6.1 ）〕，則 $P_t/P_0 = P(T>t) = s(t)$ 是活存機率（ Survival probability ），$P_t = P_0 s(t)$，瞬間死亡率的定義是

$$Z(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t<T<t+\Delta t \mid T>t)}{\Delta t}$$

T 是年齡隨機變數

$$Z(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(T>t+\Delta t) - P(T>t)}{\Delta t \cdot P(T>t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t \cdot s(t)}$$

$$= -\frac{ds(t)}{dt} \frac{1}{s(t)} = -\frac{d \log s(t)}{dt} = -\frac{d \log [P_0 s(t)]}{dt}$$

$$= -\frac{d \log P_t}{dt}$$

$$\therefore \quad s(t) = e^{-\int_0^t Z(u)du}$$

$$s(t) = e^{-\alpha t} \qquad \text{if} \qquad Z(t) = \alpha$$

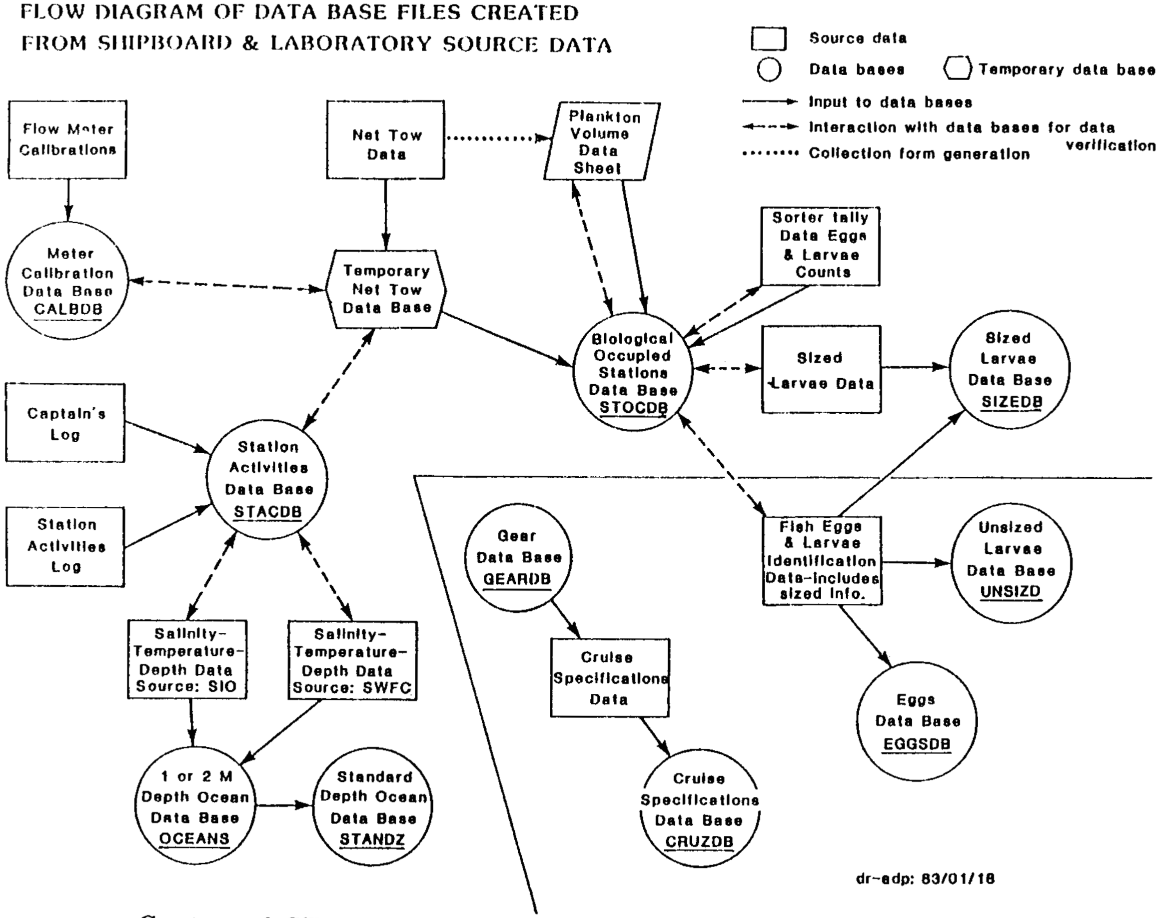
$$P_t = P_0 s(t) = P_0 e^{-\alpha t}$$

根據 1979－81 海洋調查所得魚卵資料，我們將鯷魚魚卵年齡頻度表列如下（ Lo 1985 ）

年齡間隔	平均年齡	平均值 P_t		
小時	t 日	1979	1980	1981
4－16	0.42	10.79	9.34	5.64
16－28	0.92	4.36	9.22	7.66
28－40	1.42	4.91	6.34	4.87

圖 7.3

FLOW DIAGRAM OF DATA BASE FILES CREATED
FROM SHIPBOARD & LABORATORY SOURCE DATA



Courtesy of SWFC.

40 − 52	1.92	4.58	4.71	6.05
52 − 64	2.42	6.87	5.14	4.85
64 − 76	2.92	3.63		
$\hat{P}_0$ (SE)		9.76(2.82)	11.46(1.27)	6.73(1.32)
$\hat{\alpha}$ (SE)		0.33(0.28)	0.38(0.09)	0.11(0.13)

A、如何決定 s(t) 或 Z(t)

a、繪圖(P_t , t),($\log P_t$, t)或者($\log P_t$, $\log t$),直接由圖來決定 P_t 和 t 的關係。此法容易使用,但有時不精確(圖 7.4)(Lo, 1985)。

b、先推算 Z(t),再由公式 $s(t) = e^{-\int_0^t Z(u)du}$ 計算 s(t) 和 $P_t = P_0 s(t)$。

$$Z(t) \approx \frac{[P_t - P_{t+\Delta t}]}{[\Delta t] \cdot P_t} \qquad \text{(表 7.1)(Table 2, Lo 1985)}$$

根據鯷魚魚卵資料,我們獲得 $Z(t_i) = 0.40, 0.36, 0.37$,$\overline{Z(t)} = 0.38$,所以 Z(t) 是一常數,不隨年齡而變,$S(t) = e^{-\alpha t}$; $\alpha = \overline{Z(t)}$。

B、應用平均值或原有資料推算死亡率(看前頁)

在每年調查中,均設有一個魚卵資料檔案(Data file)具有年齡和觀察魚卵頻度(Frequency),平均每一記錄(Record)包括 A, B, C day old 魚卵和它們的年齡(表 6.3)。

	−A−		−B−		−C−	
Tow no.	t	P_t	t	P_t	t	P_t
1	×	×	×	×	×	×
2	×	×	×	×	×	×
3	×	×	×	×	×	×

另一魚卵檔案(Data file)經重新排列包括下列項目(表 6.4)

Tow no.	t	P_t
1	×	×
1	×	×
1	×	×
2	×	×
2	×	×
2	×	×

爲了推算瞬間死亡率 $Z(t) = \alpha$,我們可以直接將所有的(t, P_t)用來推算死亡率,因此我們有兩種資料:($\bar{t}$, $\bar{P}_{(t)}$)和(t, P_t),前者是將魚卵捕獲量分別按其年齡歸併於各年齡組(4−28h),(28−40h),(40−52h),(52−64h),(64−72h),再計算每一小組的平均年齡($\bar{t}$),和平均生產量($\bar{P}_t$),後者是用原有資料來推算 Z(t),一般

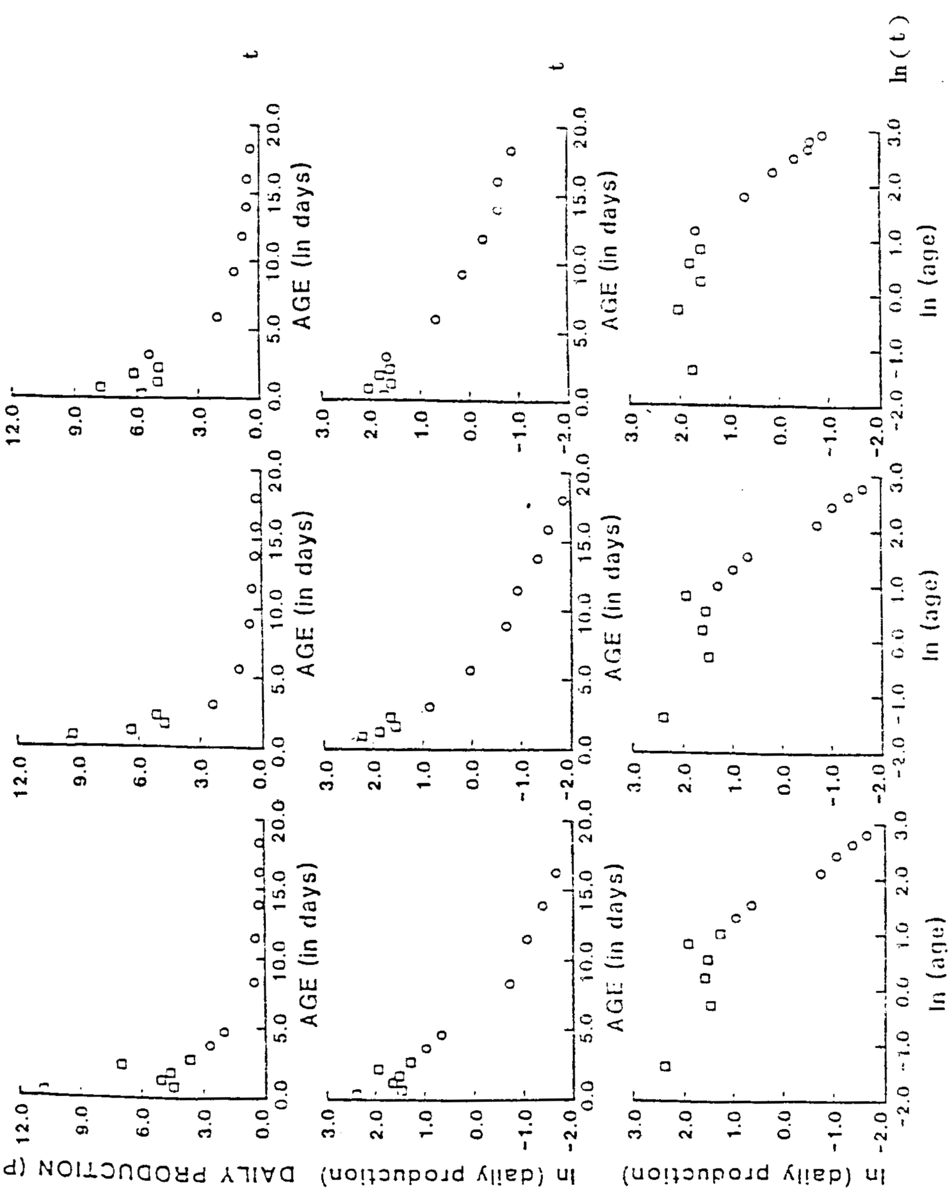


圖 7.4 Daily egg and larval production of Northern Anchovy per $0.05\,m^2$ (P_t) by age in days (t) and their log transformation ($\ln(P_t)$), 1979 – 1981.
A linear relationship between $\ln(P_t)$ and t indicates a constant instantaneous mortality rate (IMR) and a curvilinear relationship between $\ln(P_t)$ and t indicates an age dependent IMR. Squares are egg data and open circles are larval data.

表 7.1

The instantaneous mortality rates of anchovy eggs and larvae < 20 days ($z(t_i)$) by age in days ($\bar{t}_i$) computed from the daily egg and larval production estimates (P_{t_i}) and age (t_i), 1980.

i	t_i(days)	Daily egg and larval production P_{t_i}	$P_{t_{i-1}}-P_{t_i}$	t_i-t_{i-1}	$\bar{t}_i = (t_i+t_{i-1}/2)$	$z(t_i)^1$
1	0.67	9.28				
2	1.67	5.53	3.75	1.00	1.17	0.40
3	2.60	3.70	1.83	0.93	2.14	0.36
4	3.57	2.37	1.33	0.97	3.09	0.37
5	5.65	1.04	2.28	2.08	4.61	0.46
6	5.91	0.99	0.05	0.26	5.78	0.18
7	7.69	0.86	0.13	1.78	6.80	0.07
8	8.90	0.49	0.37	1.21	8.30	0.36
9	11.47	0.39	0.10	2.57	10.19	0.08
10	13.83	0.26	0.13	2.36	12.65	0.14
11	15.91	0.21	0.05	2.08	14.87	0.09
12	17.99	0.15	0.06	2.08	16.95	0.14

$z(t) = 0.0060 + 1.63/t$ is the function fitted to the data in the last two columns for $t > 4.5$ days.

$^1 z(t_i) = (P_{t_{i-1}}-P_{t_i}) / (t_i - t_{i-1}) / P_{t_i}$

而言兩種方法的結果差異甚小。

C、如果在 $P_t = P_0 s(t)$ 兩邊取了對數，而使公式線性化，即 $\ln P_t = \ln P_0 + \ln s(t)$，則迴歸最小平方法可以用來推算 $Z(t)$。但如果 P_0 是一項重要的參數，則非線性迴歸方法比較適合（ Lo 1986 ）。

7.3 仔魚（＜20 日，＜10 mm ）之死亡推算

仔魚死亡率之推算是根據魚體長頻度之資料，而非自一族資料（ Cohort data ）。我們的假設在平衡狀況（ Steady state ）下利用從海中捕獲之仔魚體長頻度分配（ Frequency distribution ），來推算一族狀況。但是魚網所捕獲之漁獲量是偏差的，因爲小魚會從魚網中漏出去，大魚會躲避魚網，若不考慮這些因素，則死亡率推算將是偏差的。對鯷魚之仔魚研究，美國西南漁業中心收集資料已有卅多年的歷史，爲獲得不偏差之死亡率推算，該中心先後做了幾個海上試驗（ Sea survey ）以計算各種網目之魚卵和仔魚的擠出率（ Extrusion rate ），並計算白晝／夜晚漁獲量比率來推算仔魚的躲避率（ Avoidance rate ）。在“仔魚死亡推算”前題下，我們將討論：1.仔魚因網目大小之留存率（ Retention rate due to mesh size ）與躲避魚網之留存率（ Retention rate due to avoidance ）2.仔魚生產率（ production rate ）之推算和各種修正因素之公式，3.死亡率的模式。

A、仔魚在魚網中之留存率（ Retention rate ）

a、仔魚之擠出率（ Extrunsion rate ）和留存率（ Retention rate ），（擠出率＝1－留存率）：在過去卅年中西南中心曾用不同的魚網捕獲仔魚。

年度	網架	網目	網地質料
1951－68	1m ring net	.55 mm	Silk 絲
69－77	〃	.505 mm	Nitex 尼龍
78－Now	Bongo	.505 mm	〃
80－82	Calvet	.333 mm	〃
83－Now	〃	.150 mm	〃

爲了計算各種網目之仔魚擠出率，我們先後進行四種網目試驗。

年度	大網目	小網目	試驗
1966－68	1m silk net of .55 mm	1/2 m Nylon net of 0.333 mm	(1)
1969	monofilament .505 mm	〃	(2)

1982	.333 mm	.150 .075 mm	(3)
1983	Nitex .505 mm	.333 mm	(4)

資料來自試驗(1)和試驗(3)用來估計 0.55 mm 仔魚擠出率。

試驗(4)和試驗(3)用來估計 .505 mm 擠出率，試驗(3)用來估計 .333 mm 擠出率。

a1. 1982 網目試驗（ Lo 1983 ）

1982 年三月，我們在洛山磯灣裏選擇了 Anchovy區的一個測站，作了爲期一週的海上試驗。一共有 142 拖網次，每一個網次包括繫在一起的三種魚網，其網目爲 .333，.150 和 0.075 mm ，這些魚網垂直投放在 70 m 的深度再垂直收回。魚卵和仔魚體長頻度均用來推算它們的擠出率，這些擠出率和其它試驗所得之擠出率（比較 .505 mm 與 .333 mm 之漁獲量）合併起來推算大網目之魚卵和仔魚的衝出量。

在此試驗中，三個魚網之位置，在每六小時內兩個魚網互換位置，避免位置所引起的漁獲量之偏差。

欲檢查三種網目之平均漁獲量不一樣的假設，魚卵與小於 4.5 mm 仔魚歸於一項檢定——多變數變方分析（ Multivariate analysis of variance ; MANOVA ）。大於 4.5 mm 的仔魚則用 χ^2 檢定，因爲後者有 0.69－0.97 的樣本，其漁獲量爲零。（仔魚分類成 2.0 , 2.5 , 3.0 , 6.0 , 6.5^+ mm ）。

在多變數變方分析中，每一樣本單位（ Sampling unit ）的觀察量是魚卵， 2.0 , 2.5 , …… , 4.0 mm 之漁獲量。因爲有些仔魚頻度分配是偏斜的（ Skew ），所以先應用對數變換 $x = \ln(y+1)$ 再行分析。

首先使用雙向（ Two way) MANOVA ；一方是網目（0.075 , 0.150 和 0.333mm ），一方是網所在位置〔右方（Starboard ），中間，和左方（ Port ）〕，結果是位置對漁獲量並無顯著的影響（ Significant effect ），但是網目對漁獲量有顯著的影響。因爲魚網位置無關緊要，我們就使用單向 MANOVA ； 0.075 mm 和 0.150 mm 合併的漁獲量平均值與 0.333mm 網目之漁獲量之平均值比較，其差別是顯著的，至於比較 0.075 和 0.150 mm 網目除了魚卵外，仔魚平均値的差異不大。結論是一部分的魚卵和小於 4.5mm的仔魚自0.333 mm 網目漏出。

至於比較在三個網目下之大於 4.5 mm的仔魚擠出率，我們用了 χ^2 測驗。對於每一體長之仔魚，我們作一個 2×3 的列聯表（ Contingency table ），一邊是三種網目，一邊是無仔魚和有仔魚的樣本次數，所以一共有 5 個 χ^2 Value。除了最大體長之仔魚組的結果是明顯不同外，其它 χ^2 數值都甚小。因爲組間（ Among groups ）沒有什麼相關，

五個 χ^2 數可以加起來檢定“有仔魚”和“無仔魚”之分配是否與網目大小有關，結果是 χ^2 統計值（ 11.94 ）在 5 ％之顯著水準下甚小（表 7.2 ； Lo 1983 ）。

a2. 仔魚和魚卵之留存率推算

目前每年之海上調查是用 Bongo 0.505 mm 和 Calvet 0.150 mm 之漁網。Bongo 0.505 mm 的留存率是根據 1982 年和 1983 年兩次海上試驗所得的結果。

以下是仔魚和魚卵自不同網目之留存率推算值：

仔魚：網目　　留存率是魚體長之函數（ R_L ）

0.505 mm
$$R_L = \begin{cases} \{1 + e^{4.36-1.066L}\}^{-1} & L < 6.5 \text{ mm} \\ 1 & L \geq 6.5 \text{ mm} \end{cases}$$

0.555 mm
$$R_L = \begin{cases} \{1 + e^{4.53-1.098L}\}^{-1} & L < 6.5 \text{ mm} \\ 1 & L \geq 6.5 \text{ mm} \end{cases}$$

0.333 mm
$$R_L = \begin{cases} 0.63 & L < 4.25 \text{ mm} \\ 1 & L \geq 4.25 \text{ mm} \end{cases}$$

L ：魚體長（ *mm* ）

魚卵：網目	留　存　率
0.505 mm	0.29
0.55 mm	0.27
0.333 mm	0.91

b 、仔魚因躲避魚網（ Avoidance ）之留存率（ Hewitt and Methot 1982 ）

仔魚隨年齡之增長逐漸會躲避魚網。其躲避的程度與仔魚體長和光線之強弱有關。雖然我們沒有仔魚躲避魚網之直接觀測值，但爲了要推算因其躲避魚網之仔魚的留存率，我們比較白晝（ 0830 — 1630 ）與夜晚（ 2030 — 0230 ）的漁獲量，並按體長推算出漁獲量的比率：

用 DN_L 來代表魚體長 L_{mm} （ Live size ）中午（ 1200 小時）和午夜（ 2400 小時）漁獲量之比率

$$DN_L = 2.4931 \times \text{Exp}(-0.2304 \times L)$$

留存率（ f ）則因體長（ L ）和時間（ t ）而異：

$$f = \frac{1 + DN_L}{2} + \frac{1 - DN_L}{2}\left[\cos\left(2\pi \frac{t}{24}\right)\right]$$

B 、各年齡之仔魚生產量（ Larval production ）

因爲魚網所導致之漁獲量偏差，我們必須按魚體長，調整觀測之頻度，在此有三種

表 7.2 Number of samples with zero catch from a total of 140[1] samples for anchovy eggs and larvae by length group, the maximum catch for each of three mesh sizes and the chi-square values for larvae ≥ 4.5mm based upon three-vertical-net-experiment, 1982.

	Number of samples with zero catch			Maximum catch			chi-square
	0.075mm	0.150mm	0.333mm	0.75mm	0.150mm	0.333mm	d.f.=2
Eggs	0	0	0				
2.0 mm	42	38	33				
2.5	16	10	9				
3.0	0	0	2				
3.5	7	8	18				
4.0	27	24	52				
4.5	103	97	97	8	3	5	0.83
5.0	111	107	103	5	3	5	1.27
5.5	131	133	136	2	1	1	2.0
6.0	132	130	133	2	1	1	0.6
6.5+	117	102	118	2	3	2	7.24*
							11.94 (d.f.=10)

[1]Two samples were discarded because they were spoiled.
*Significant at 5% level.

變數須要考慮。a、因體長而異之網擠出率。b、因體長而異之躲避率。c、網中海水滲透之總體積。除此以外，為了計算死亡率，我們必須將體長變換成年齡，每一體長間隔（Length category）之頻度受成長率快慢之影響，成長率慢的在此一體長間隔的持續時間（Duration）就長，在樣本中觀測之頻度（Frequency）就顯然地高，因此我們必須計算每單位時間生產量〔Production per time unit （日或小時…）〕有如物理之流率（Flux）。如此對於觀測之頻度共有四種加權（Weight）。

仔魚自海中捕獲後，均分類成 1 mm 的項目：2.5 mm（包括 2.0，2.5，3.0 mm），3.75 mm（3.5，4.0 mm），4.75 mm（4.5，5.0 mm）………每一體長之頻度分配均由負二項分配來配合（Fit），並考慮到各種偏差因素。Bessel（1972）提出一加權負二項分配模式，本中心兩位同仁即應用此模式來推算各體長之平均生產量（Zweifel and Smith 1981）。

加權負二項分配的密度函數為：

$$f(x_i \mid w_i) = \left(\frac{k}{mw_i + k}\right)^k \left(\frac{mw_i}{mw_i + k}\right)^{x_i} \frac{(k + x_i - 1)!}{x_i!\,(k-1)!}$$

$$\text{Likelihood function} = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid w_i)$$

Where w_i = 四項修正因素之乘積 = $w_{1i} \cdot w_{2i} \cdot \cdots\cdots \cdot w_{4i}$

w_{1i} = 因擠出魚網之留存率

w_{2i} = 因躲避魚網之留存率

w_{3i} = 仔魚在一體長間隔（Length category）之持續時間（duration）

w_{4i} = 魚網滲水體積／某一單位滲水體積

n = 拖網總數

$$E x_i = mw_i \qquad \mathrm{Var}(x_i) = m_i + \frac{m_i^2}{k} = m_i\left(1 + \frac{m_i}{k}\right)$$

m_i 是母體平均值

m 是在無擠出、無躲避，仔魚每一單位滲水體積之平均單位時間之漁獲量（Production per unit time）。

由每一體長之仔魚，我們可推算 m_t（$\hat{m}_t$），（$\hat{m}_t$，t）即用於推算仔魚之死亡率。（表 7.3 Zweifel and Smith 1981）。

C、隨年齡而變之仔魚死亡率（P.142－144, Lo 1985）

表 7.3

(1) Estimates of live[1] size at age of anchovies for the classes of preserved larvae[2] regularly taken during CalCOFI surveys and the estimated "effective sampler size" w for a standard volume of water strained during a tow at time of maximum catch (2300 h).

Group	Preserved size	Recorded size	Live size Begin	Live size End	Average size	Age from hatch	Days in interval	Weight factor[3] "w" 17°	16.2°	19°
0	0.0– 0.5	0.00	0.02	2.52	0.72	−1.31	2.47	0.60	0.37	0.27
1	2.0– 3.0	2.50	2.52	3.94	3.23	0.67	1.95	0.63	0.39	0.28
2	3.5– 4.0	3.75	3.94	5.04	4.49	5.14	4.69	2.11	1.30	0.93
3	4.5– 5.0	4.75	5.04	6.10	5.57	8.01	2.67	1.59	0.98	0.71
4	5.5– 6.0	5.75	6.10	7.15	6.62	10.53	2.40	1.73	1.07	0.77
5	6.5– 7.0	6.75	7.15	8.17	7.66	12.83	2.21	1.79	1.10	0.79
6	7.5– 8.0	7.75	8.17	9.18	8.68	14.96	2.07	1.68	1.04	0.74
7	8.5– 9.0	8.75	9.18	10.19	9.68	16.98	1.97	1.60	0.99	0.71
8	9.5–10.0	9.75	10.19	11.19	10.69	18.91	1.90	1.54	0.95	0.68
9	10.5–11.0	10.75	11.19	12.18	11.69	20.78	1.85	1.49	0.92	0.66
10	11.5–12.0	11.75	12.18	13.18	12.68	22.61	1.81	1.46	0.90	0.65
11	12.5–13.0	12.75	13.18	14.18	13.68	24.40	1.78	1.44	0.89	0.64
12	13.5–14.0	13.75	14.18	15.17	14.68	26.17	1.76	1.43	0.88	0.63
13	14.5–15.0	14.75	15.17	16.17	15.67	27.93	1.76	1.42	0.88	0.63
14	15.5–16.0	15.75	16.17	17.15	16.66	29.66	1.71	1.38	0.86	0.61
15	16.5–18.0	17.25	17.15	19.16	18.15	32.29	3.55	2.87	1.77	1.27
16	18.5–20.0	19.25	19.16	21.18	20.17	35.87	3.62	2.93	1.81	1.30
17	20.5–22.0	21.25	21.18	23.21	22.19	39.55	3.75	3.03	1.87	1.34
18	22.5–24.0	23.25	23.21	25.24	24.22	43.38	3.93	3.18	1.96	1.41

[1]Shrinkage corrections are based on the work of Theilacker (1980).
[2]Zweifel and Lasker (1976) assign a development equivalent length to eggs (Group 0) in order to utilize the same equation for development and growth.
[3]At 2300 h and 3.5 m^3 water strained per meter of depth.

(2) Number of 3.75 size class larvae taken in January, February and March of 1969 in southern California inshore Region 7 by station with hour, temperature at 10 m depth and standard haul factor = 10/volume strained/depth. Stations are identified in Kramer et al. (1972).

	January				February			
Station	Hour	Temp	SHF	Larvae	Hour	Temp	SHF	Larvae
80.51	17.98	13.06	2.99	9	05.03	13.22	3.41	69
.52	19.88	13.02	3.15	3	03.20	13.29	3.48	28
.55	22.23	13.22	3.42	21	00.10	12.85	3.82	1
.60	12.82	12.82	3.29	0	20.18	12.84	4.36	0
82.47	14.70	14.07	3.15	84				
83.40	08.95	14.31	.73	291	06.67	13.51	1.89	51
.43	11.55	14.43	3.22	343	10.12	12.90	3.67	18
.51	04.35	13.46	2.95	45	19.35	12.58	3.97	1
.55	01.35	13.29	3.26	0	22.43	13.17	3.29	4
87.33	21.93	14.20	2.35	115	17.25	14.20	2.60	103
.35	00.38	14.76	3.44	149	20.12	13.87	2.99	244
.40	03.12	14.03	3.25	550	21.78	13.89	3.44	88
.45	05.78	14.26	3.02	311	00.68	14.07	3.34	114
.50	08.22	13.44	2.95	14	03.18	12.80	2.93	10
.55	10.47	14.31	3.29	7	05.87	13.31	3.41	191
90.28	12.28	14.49	3.36	144	00.78	14.33	3.34	390
.32	09.05	14.79	3.29	223	22.18	14.63	3.17	1 012
.37	06.28	14.96	3.37	370	18.97	14.86	3.24	275
.39					15.68	14.80	3.48	243
.45	01.07	13.44	3.35	35	12.10	13.93	3.23	195
.53	20.77	14.68	3.30	632	09.37	13.80	3.20	84
93.27	09.93	14.03	2.89	21	05.32	14.36	2.72	820
.28	11.98	14.12	3.34	2	06.78	14.38	3.05	287
.30	14.07	14.05	3.25	4	09.37	14.45	3.45	1 343
.35	17.12	15.52	3.18	2	15.40	14.45	3.02	843
.40	19.93	14.31	3.20	118	20.28	14.78	3.19	115
.45	22.88	15.42	3.12	2	23.10	13.96	3.11	254
.50	01.72	15.56	3.39	0	01.68	14.65	3.14	385
94.30	07.37	14.31	2.97	46	17.03	13.91	3.29	354
97.29	12.57	14.88	2.04	44	09.10	14.22	2.60	120
.30	13.85	15.02	2.82	7	08.52	14.18	2.93	77
.32	17.28	15.08	2.81	18	07.53	14.35	3.14	79
.35	20.52	15.04	2.59	0	04.20	14.35	3.13	34
.40	01.16	15.48	3.00	0	01.40	14.20	3.18	117
		March						
90.45	09.10	13.72	3.31	282				

表 7.3（續）

(3) Abundance classes of 3.75 mm larvae taken in the first quarter of 1969 in the southern California inshore Region 7 with average effective sampler size," age at 16.2°C, and corrections for bias due to temperature, volume of water strained, avoidance and extrusion.

Lower–Mark–Upper	No. of stations	Weight[a]	Age[b]	Temp[c]	Vol.[d]	Avoid[e]	Escape[f]
0	6	1.28	7.02	3.20	.88	.73	.63
1	2	1.04	8.75	3.99	.73	.56	.63
2	3	.85	6.10	2.78	.89	.54	.63
3	1	1.10	8.30	3.78	.91	.51	.63
4	2	1.53	7.55	3.44	.87	.80	.63
7	2	.96	6.40	2.92	.94	.56	.63
9	1	1.06	8.24	3.76	.95	.47	.63
10	1	1.79	8.62	3.93	.97	.74	.63
14	1	.75	7.73	3.53	.97	.35	.63
16– 21–32	5	1.21	7.49	3.42	.89	.64	.63
33– 43–64	6	1.63	7.12	3.24	1.10	.74	.63
65– 99–128	13	1.21	6.96	3.17	.94	.65	.63
129–205–256	8	.93	6.84	3.12	.87	.54	.63
257–329–512	10	1.28	6.68	3.04	1.19	.58	.63
513–771–1024	5	1.55	6.62	3.02	.93	.88	.63
1025–343–2048	1	.80	6.59	3.01	.83	.51	.63

[a] Average product of individual weighting components.
[b] Calculated from equations obtained from laboratory growth experiments. Temperature Specific Equations for growth and development of anchovy, *Engraulis mordax*, during embryonic and larval stages.
[c] Calculated as estimated time in size interval/standard time = 2 days.
[d] Calculated as estimated volume of water strained/standard volume = 3.5 m^3 per meter depth.
[e] Calculated as long term catch by hour/standard or maximum catch at 2300 h.
[f] Determined from mesh retention study of Lenarz (1972).

自 1980 年仔魚資料（表 7.4；Lo 1985）我們擬定的仔魚瞬間死亡率是隨年齡而變的：$Z(t)=\beta/t$ 。首先計算樣本瞬間死亡率 $Z(t_i)=(P_{t_{i-1}}-P_{t_i})/(t_i-t_{i-1})/P_{t_i}$ 以略估在年齡 t_i 時的 $\frac{ds(t)}{dt}\cdot\frac{1}{s(t)}=Z(t)$（表 7.1）。$Z(t)$ 和 t 之間的關係決定 $Z(t)$ 之方程式形式。魚卵和小於 4.5 日之仔魚的 $Z(t)$'S 是近於一常數，但是大於 4.5 日的仔魚，其 $Z(t)$ 是隨年齡（t）而減小，$Z(t)=\beta/t$ 被認爲是描述仔魚死亡率的最佳模式，所以仔魚（＜20 日）的 Conditional 留存機率

$$s(t)=e^{-\int_{t_c}^{t}Z(u)du}=\left(\frac{t}{t_c}\right)^{-\beta} \qquad t_c<t<20\text{ 日}$$

與魚卵死亡率合併則得

$$s(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & t\leqslant t_c \\ e^{-\alpha t_c}\left(\frac{t}{t_c}\right)^{-\beta} & t_c<t<20\text{ 日}\end{cases}$$

仔魚死亡曲線

$$P_t=P_0\,e^{-\alpha t_c}\left(\frac{t}{t_c}\right)^{-\beta}=P_{t_c}\left(\frac{t}{t_c}\right)^{-\beta} \qquad (7.1)$$

t_c 或是孵化年齡（～2.5 日），或是卵黃囊年齡（4.5 日）。

在西南中心，我們已有現成的電腦軟體用來計算仔魚生產率（Larval production rate）詳細程序，請直接向編者函索。

生產量和年齡（P_t，t）之資料（t＜20 日）透過電腦之 STATISTICAL PACKAGE 的 Nonlinear regression 則可獲得 $\hat{P}_{t_c}$ 和死亡率係數 $\hat{\beta}$ （圖 7.4；Lo 1985）。

表 7.4

Daily egg and larval production per 0.05 m^2 (P_t) at various ages in days (t) sampled from CalVET and Bongo tows, and the estimates of five parameters: egg production at age zero ($\hat{P}_0$), egg mortality ($\hat{\alpha}$), larval mortality coefficient ($\hat{\beta}$), larval production at hatching ($\hat{P}_I$) and incubation time in days (t_I) in CalCOFI regions 4, 7, 8, and 11, Jan-Apr, 1979-81.

	1979[1]			1980			1981				
	t	P_t	Live standard length (mm)	t		P_t	t		P_t	Live[3] standard length (mm)	
Eggs	0.4167	10.79		0.4167		9.34	0.4167		5.64		
	0.9167	4.36		0.9167		9.22	0.9167		7.66		
	1.4167	4.91		1.4167		6.34	1.4167		4.87		
	1.9167	4.58		1.9167		4.71	1.9167		6.05		
	2.4167	6.87		2.4167		5.14	2.4167		4.84		
	2.9167	3.63									
Larvae	3.73	2.64	3.03	2.94		2.26	3.14		3.23	3.03	CalVET net
				4.08		2.39	4.35		2.99	3.59	CalVET net
				5.91		0.99	6.25		2.10	4.13	CalVET net
				7.69		0.86	8.08		1.84	4.66	CalVET net
	4.72	1.96	3.26	3.05		2.35	3.10		5.29	2.97	Bongo net
	8.32	0.48	4.17	5.65		1.04	5.86		1.96	4.00	Bongo net
	11.49	0.35	5.69	8.90		0.49	9.22		1.10	5.13	Bongo net
	13.90	0.25	.6.77	11.47		0.39	11.79		0.72	6.23	Bongo net
	16.24	0.19	7.83	13.83		0.26	14.01		0.54	7.30	Bongo net
	18.31	0.13	8.87	15.91		0.21	16.01		0.53	8.35	Bongo net
				17.99		0.15	18.22		0.41	9.38	Bongo net
$\hat{P}_c$		9.76	[2](2.82)	11.46	(1.27)		6.73	(1.32)			
$\hat{\alpha}$		0.33	(0.28)	0.38	(0.09)		0.11	(0.13)			
$\hat{\beta}$		1.83	(0.14)	1.24	(0.17)		1.19	(0.17)			
$\hat{P}_I$		3.59	(0.18)	2.51	(0.19)		4.81	(0.42)			
t_I		3.21		2.96			2.85				

[1]Not weighted by area size.
[2]Asymptotic standard error in ( ).
[3]For both 1980 and 1981 larval data.

PRESERVED SIZE (mm)	LIVE SIZE (mm)	(t) AVE. AGE (day)	($_wP_t$) DAILY LARVAL PROD./0.05 m^2
2.50	3.26	4.91	0.518
3.75	4.57	8.60	0.121
4.75	5.69	11.58	0.0838
5.75	6.27	14.15	0.0665
6.75	7.83	16.41	0.0481
7.75	8.87	18.62	0.036

$$_wP_t = 1.364\ (t/3.16)^{-2.217}$$

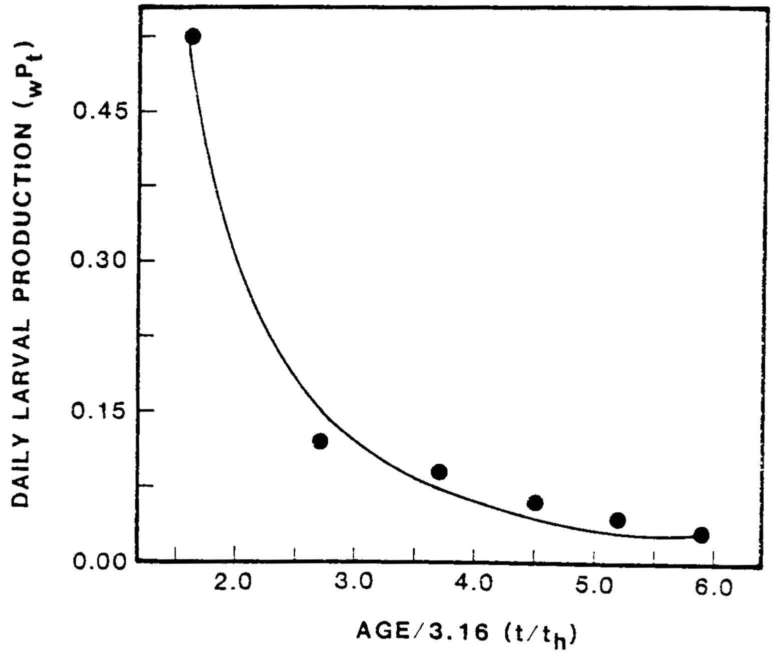


圖 7.5 DAILY LARVAL PRODUCTION PER 0.05 m^2 ($_wP_t$) AT AGE t, 1979

References

Bissell A. F.
1972. A Negative binomial model with varying element sizes. Biometrika 59(2).

Bliss, C.I.
1967. Statistics in Biology, Volume 1, New York: McGraw-Hill Inc..

Chen, K.K., C.I. Bliss and E.B. Robbins
1942. The Digitalis-like Principles of Calotropis Compared with Other Cardiac Substances, J. Pharmacot. Exptl. Therap. 74:223-234.

Cochran, W.G.
1977. Sampling Technique, John Wilely & Sons, Inc..

David, F.N.
1938. Tables of the Correlation Coefficient, Cambridge Univ. Press.

Draper N. and H. Smith
1981. Applied regression analysis, John Wiley & Sons, Inc. New Yolk, Chichester, Brisbane, Toronto, 709p.

Elliot, J.M.
1971. Some Methods for the statistical analysis of samples of benthic invertebrates: Freshwater Biological Association Scientific Publication No. 25. The Ferry House, Ambleside, Cumbia, LA22 OLP.

Fiedler, P.C., R.D. Methot, and R.P. Hewitt
1986. Effect of California El Nino 1982-1984 on northern anchovy. Journal of Marine Research Vol 44 p 317-338.

Green R.H.
1979. Sampling design and statistical methods for environmental biologists. John Wiley and Sons, New Yolk, Chichest, Brisbane, Toronto. 257 p.

Hewitt R.P. and R. Methot
1982. Distribution and mortality of northern anchovy larvae in 1978 and 1979. CalCOFI Rep. vol XXII.

-------- ,G.H. Theilacker and N.C.H. Lo
1985. Causes of mortality in young jack mackerel. Marine Ecology-progress series : vol 26: 1 - 10.

Holck, H.G.O., K.K. Kimura, and B. Bartels
1946. Effect of the anesthetic and the rate of injection of igitalis upon its lethal dose in cats. J. Am. Pharm. Assoc. Sci. Ed. 35:366- 370.

Kendall, M.G. and A. Stuart
1963. The Advanced Theory of Statistics,Vol. 1 and 2: Hafner Publishing Company, New York.

Li, J.C.R.
1965. Statistics Inferences I. Ann Arbor, Michigan: Edward Brothers Inc. .

Lo, Nancy C.H.
1977. Notes on statistical concepts and the application of statistical techniques to fishery biology. State of California, Department of Fish and Game, Marine Resources Reference No 77 - 1.

1983. Re-estimation of three parameters associated with anchovy eggs and larval abundance: temperature dependent incubation time, yolk-sac growth rate and egg and larval retention in mesh nets. NOAA-TM-NMFS-SWFC-31.

1985. A model for temperature-dependent northern anchovy egg developement and an automated procedure for the assignment of age to staged eggs. In R. Lasker (ed.), An egg production method for estimating spawning biomass of pelagic fish: application to the northern anchovy. NOAA Tech. Rep. NMFS 36. National Marine Fisheries Service.

1985. Egg production of the central stock of northern anchovy, Engraulis Mordax, 1951-82. Fish. Bull: 83(2).

1986. Modeling life-stage-specific instantaneous mortality rates of anchovy eggs and larvae. Fish. Bull. 84(2).
Macdonard A. G. and I.G. Priede
1983. Experimental biology at sea. Academic press, A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, 414 p.
Mendenhall, W.
1971. Introduction to Probability and Statistics, third ed., Belmont, California: Duxbury Press.
Methot, R.D. and D. Kramer
1979. Growth of northern anchovy, Engraulis Mordax, larvae in the sea, Fish. Bull:77(2).
-------- and R. Hewitt
1980. A generalized growth curve for young anchovy larvae: Derivation and tabular example. Admin. Reprt no. LJ- 80-17, National Marine Fisheries Service.
Moser, H.G. and E.H. Ahlstrom
1984. Staging anchovy eggs. In R. Lasker (ed.), An egg production method for estimating spawning biomass of pelagic fish: application to the northern anchovy. NOAA Tech. Rep. NMFS 36. National Marine Fisheries Service.
Schnute J.
1981. A versatile growth model with statistically stable parameters, Can. J. Fish. Aquat. Sci. 38:1128-1140.
Seber, G.A.F.
1973. The estimation of animal abundance and related parameters. Hafner Press, New York. 506 p.
Smith, P.E. and S.L. Richardson
1977. Standard techniques for pelagic fish eggs and larval surveys. FAO Fisheries Technical Paper no. 175 FIR/T/175(En). Food and Agriculture Organization of the United Nations.
Snedecor, G.W. and W.G. Cochran
1967. Statistical Methods, sixth ed., Ames, Iowa: The Iowa State University Press.
Theilacker, G.H.
1980. Changes in body measurements of larval northern anchovy, Engraulis Mordax, and other fishes due to handling and preservation. Fish. Bull.: 78(3).
Zweifel J.R. and R. Lasker
1976. Prehatch and posthatch growth of fishes - A general model. Fish. Bull.:74(3).

-------- and P.E. Smith
1981. Estimates of abundance and mortality _ larval anchovies (1951 - 75): application of a new method. Rapp. P.- V. eun. cons. int. Explor. Mer. 178: 248-259.